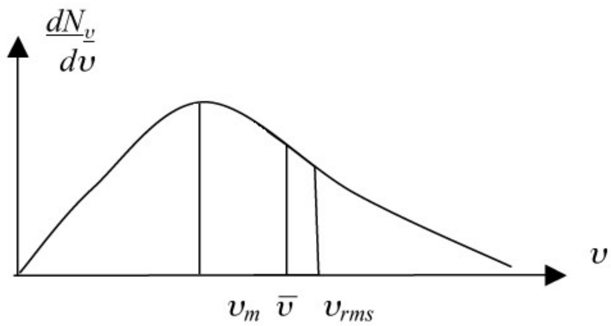

Figura 1.5. Magnitudes relativas entre las 3 velocidades

Función de error

Supongamos que queremos calcular el número de moléculas $N_{\upsilon_{x_o}}$ que tienen una componente de velocidad entre 0 y un valor υ_{x_o}. Este número está dado por:

$$N_{\upsilon_{x0}} = \int_0^{\upsilon_{x_o}} dN_{\upsilon_x} = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_0^{\upsilon_{x_o}} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} d\upsilon_x \tag{39}$$

de (38) $\upsilon_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

sustituyendo en (39) tenemos:

$$N_{\upsilon_{x0}} = N\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{1}{\upsilon_m}\int_0^{\upsilon_{x_o}} e^{-\frac{\upsilon_x^2}{\upsilon_m^2}} d\upsilon_x$$

llamando $\frac{\upsilon_x}{\upsilon_m} = x$ tenemos

$$N_{\upsilon_{x0}} = \frac{N}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_o} e^{-x^2} dx \tag{40}$$

Se define la función de error como,

$$erf(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_0} e^{-x^2} dx \tag{41}$$

es obvio que: $$erf(\infty) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to\infty} erf(x) = 1$$

La función de error *erf (x),* se puede evaluar aproximadamente haciendo un desarrollo de e^{-x^2} en serie de potencias de x^2. Por otra parte, de (40) y (41) tenemos que:

$$N_{\upsilon_{x_o}} = \frac{N}{2}erf(x) \qquad (42)$$

El número de partículas con componente

$$\upsilon_x > 0 \quad \text{es} \quad \frac{N}{2}$$

entonces el número con componente hasta υ_x

$$N_{>\upsilon_x} = \frac{N}{2} - \frac{N}{2}erf(x) = \frac{N}{2}(1 - erf(x))$$

Problema.- El número de moléculas con magnitudes de velocidad entre *0* y υ es:

$$N_{0\to\upsilon} = N\left[erf(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}xe^{-x^2}\right] \quad ; \qquad x = \frac{\upsilon}{\upsilon_m}$$

Solución:

$$N_{0\to\upsilon} = \int_0^\upsilon dN_\upsilon$$

$$= 4\pi N\frac{1}{\pi^{3/2}\upsilon_m{}^3}\int_0^\upsilon e^{-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_m{}^2}}\upsilon^2 d\upsilon$$

$$= \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\int_0^\upsilon e^{-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_m{}^2}}\frac{\upsilon^2}{\upsilon_m{}^2}d\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_m}\right)$$

$$= \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\cdot x^2 dx$$

$$= \frac{4N}{2\sqrt{\pi}}\int_0^x xe^{-x^2}(dx^2)$$

$$= \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\left\{ -xe^{-x^2}\Big|_0^x + \int_0^x e^{-x^2}dx \right\}$$

$$= \frac{2N}{\sqrt{\pi}}\left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} erf(x) - xe^{-x^2} \right\}$$

$$= N\left\{ erf(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} xe^{-x^2} \right\} \qquad \text{q.e.d.}$$

La Función de Distribución de la Energía

La energía traslacional de una molécula con velocidad υ es:

$$w = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

y la asociada con υ_x es $\qquad w_x = \frac{1}{2}m\upsilon_x{}^2$

Es deseable obtener una expresión que nos de el número de moléculas con energías cinéticas traslacionales comprendidas en un intervalo dado, digamos entre w y $w + dw$. Entonces

$$dw = m\upsilon d\upsilon$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2w}{m}}$$

$$\therefore \qquad d\upsilon = \frac{dw}{m}\sqrt{\frac{m}{2w}} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\frac{dw}{\sqrt{w}}$$

$$dN_w = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT)}\right)^{3/2} \frac{2w}{m} e^{-\frac{1}{3}\frac{w}{kT}} \frac{1}{\sqrt{2mw}} dw$$

$$dN_w = 2N\pi\left(kT\right)^{-3/2}\sqrt{w}e^{-\frac{w}{kT}}dw \qquad (43)$$

que es la expresión buscada. Nótese que la energía para la cual dN_w es máxima, w_m, está dada por: