11. Movimientos periódicos - oscilaciones amortiguadas

Los sistemas que se han considerado hasta ahora son **idealizaciones** en las cuales se considera que **no existe fricción**, que únicamente intervienen fuerzas conservativas de tal manera que no hay disminución de la energía mecánica y que una vez que el sistema se pone en movimiento, éste continúa oscilando para siempre sin disminución de su amplitud.

En la práctica los sistemas siempre tienen alguna forma de fricción y las oscilaciones van disminuyendo a menos que se provea de alguna forma de reemplazar la energía mecánica perdida por la fricción. (v. gr. el péndulo de un reloj)

La disminución en la amplitud originada por las fuerzas disipativas es llamada el **amortiguamiento**, y el movimiento corresponde a **oscilaciones amortiguadas**.

Entre las diferentes posibilidades, el caso más simple de analizar es el de una fuerza de amortiguamiento que es proporcional a *la velocidad del cuerpo que oscila.*

Este tipo de comportamiento se presenta en el movimiento de líquidos viscosos, como en el caso de los amortiguadores de automóviles o el deslizamiento entre superficies lubricadas con aceite. En este tipo de casos tenemos una fuerza adicional sobre el cuerpo, debido a la fricción, de la forma:

$$F = -bv$$

donde $v = dx/dt$ es la velocidad y b es una constante que describe la intensidad de la fuerza de amortiguamiento. **El signo negativo nos indica que la fuerza siempre se opone a la dirección de la velocidad**. De esta manera la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo es:

$$F = -kx - bv$$

de acuerdo a la segunda ley de Newton para el sistema tendremos que:

$$-kx - bv = ma, \text{ ó}$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Esta es una ecuación diferencial cuya solución, cuando la fuerza de amortiguamiento es pequeña y se tiene un desplazamiento inicial *A,* es de la forma

$$x = A\, e^{-(b/2m)t} \cos \omega' t$$

donde la frecuencia angular de oscilación ω' está dada por:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

lo cual puede verificarse fácilmente.

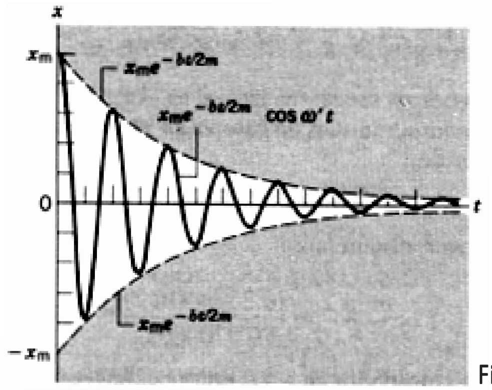

Figura 33. Oscilación amortiguada por la acción de fuerzas disipativas.

Gráfica de un movimiento armónico amortiguado. Constante de fase igual a cero. Aunque el movimiento es oscilatorio la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo.

Las diferencias entre las .soluciones del oscilador armónico simple y el amortiguado son dos:

- *La amplitud A* $e^{-(b/2m)t}$ *ya no permanece constante sino que disminuye con el tiempo de acuerdo al factor exponencial. Así mientras más grande sea el valor de* ***b****, más rápido decaerá la amplitud.*
- *La frecuencia angular* ω' *ya no es igual a* $\sqrt{\frac{k}{m}}$ *sino que es un poco más pequeña, y se convierte en cero cuando b es tan grande que*

$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = 0$$

o sea que

$$b = 2\sqrt{km}$$

Cuando *b* sobrepasa este valor el sistema ya no oscila sino que retorna a su posición de equilibrio sin oscilar. A esta situación se le denomina de **sobreamortiguamiento** y la ecuación de desplazamiento sería de la forma

$$x = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 e^{-\beta t}$$

donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales en tanto que α y β son constantes positivas determinadas por *m, k y b.*

Oscilaciones forzadas y resonancia

En esta sección se analizará el comportamiento de un **oscilador que se ve afectado por una fuerza externa, particularmente por una que actúe en forma periódica.** Cuando se presenta esta situación las oscilaciones resultantes se denominan **oscilaciones forzadas**. Una peculiaridad es que estas oscilaciones tienen la misma frecuencia que la de la fuerza externa y no la frecuencia natural del cuerpo, sin embargo habrá que resaltar que el comportamiento del cuerpo dependerá de la relación entre las dos frecuencias: la forzada y la normal.

Otro detalle importante es que un conjunto de pequeños impulsos aplicados con una frecuencia apropiada pueden producir una oscilación de gran amplitud. (Por ejemplo, un niño en un columpio o un sismo).

La problemática de las oscilaciones forzadas es muy amplia y tiene múltiples aplicaciones en sistemas acústicos, electrónica (circuitos de corriente alterna), física atómica, así como en la mecánica.

La ecuación que describe este comportamiento se puede obtener a partir de la segunda ley de Newton, considerando que la fuerza externa esté dada por una expresión de la forma:

$$F_x = F_m \cos \omega'' t$$

Donde F_m representa el valor máximo de la fuerza externa y ω'' es su frecuencia angular la cual no necesariamente es igual a la frecuencia del sistema, entonces:

$$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega'' t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

cuya solución (que puede verificarse por sustitución) es de la forma:

$$x = \frac{F_m}{G} \operatorname{sen}(\omega'' t - \varphi)$$

donde

$$G = \sqrt{m^2(\omega'' t - \omega)^2 + b^2 \omega''^2}$$

y

$$\varphi = \cos^{-1}(b\,\omega''/G)$$

Se puede observar que hay amortiguamiento, el cual ocasionaría normalmente una disminución en la amplitud, pero la fuerza externa proporciona la energía necesaria para mantener la amplitud.

La situación más *sencilla es aquella en la cual no existe amortiguamiento, de tal manera que b = 0, en estas condiciones, G toma valores altos cuando la frecuencia angular de la fuerza externa* (ω'') *es muy diferente de la frecuencia natural no amortiguada del sistema* (ω). *Esto se traduce en que la amplitud del movimiento resultante* F_m/G *es pequeña. Pero al aproximarse la frecuencia externa a la natural, entonces* $G \longrightarrow 0$ *y la amplitud* F_m/G *tiende a infinito.*

En la práctica, siempre hay algún tipo de amortiguamiento así que la amplitud de la oscilación —aunque puede llegar a ser muy grande—, permanece finita.

En los osciladores amortiguados se presenta un valor característico de la frecuencia externa ω'' para el cual la amplitud de oscilación resulta máxima. Esta situación se denomina de *resonancia y el* valor de ω'' se llama la *frecuencia angular resonante.*

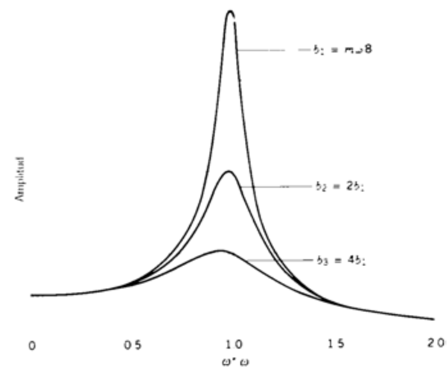

Figura 34. Gráfica de la amplitud F_m/G de un oscilador forzado en función de la frecuencia ω'' de la fuerza externa.

Es importante señalar que todas !as estructuras mecánicas *como los edificios,* puentes y *aviones tienen una o más ,frecuencias resonantes naturales.* De aquí que cuando alguna de estas estructuras es sometida a fuerzas impulsivas externas el resultado pueda ser desastroso. Considérese, por ejemplo, el caso de los terremotos, o de la acción del viento. Es famoso el caso del puente de Tacoma. Asimismo, pueden considerarse las copas de vidrio, que estallan al verse en presencia de ciertas frecuencias amplificadas.

Nota. *Esta resonancia que aquí se define como la frecuencia a la cual las oscilaciones forzadas tienen su amplitud máxima, puede definirse en otras formas, por ejemplo !a frecuencia a la cual se transfiere la máxima potencia de la unidad motriz a! sistema oscilatorio, o la frecuencia a la cual la velocidad de la masa oscilante es máxima.*

En el mes de julio de 1940 la fuerza del viento provocó la oscilación del puente de Tacoma Narrows, al cabo de dos horas el centro del puente se desplomó.

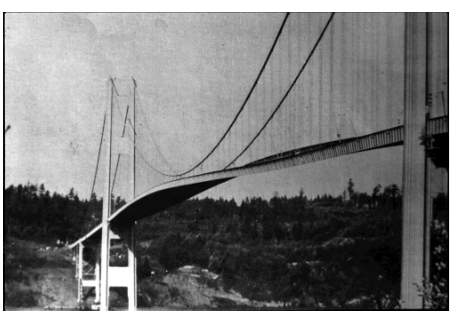

Figura 35. Fuente de Tacoma Narrows.

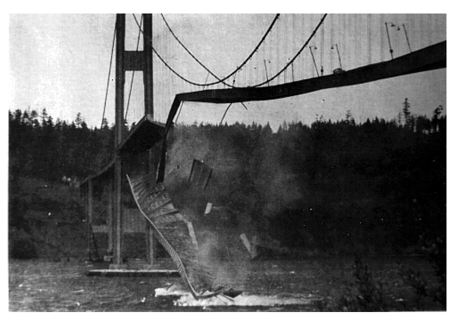

Figura 36. Fuente de Tacoma Narrows, en resonancia.