2. Trabajo y Energía

Concepto de trabajo

Uno de los conceptos más importantes de la ciencia, la tecnología y de la sociedad en general es el de la *energía*. Sin embargo no le fue fácil a los científicos llegar a su comprensión. Este concepto era desconocido inclusive para Newton y su conceptualización era todavía tema de debate alrededor de 1850. Además es el punto de partida para uno de los principios más importantes de la ciencia: *la conservación de la energía.*

En esta sección nos encargaremos de analizar únicamente los aspectos relacionados con la energía mecánica, esto es, la energía asociada con el movimiento, la posición y la deformación de los cuerpos.

Un concepto inicial que debemos de manejar es el de trabajo, el cual en la vida cotidiana puede tener muchos significados, sin embargo para la física este concepto tiene un significado muy específico.

El trabajo W efectuado por una fuerza constante sobre una partícula es igual al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento.

Matemáticamente: $W = \bar{F} \cdot \bar{s}$

La operación matemática involucrada en el cálculo del trabajo se denomina Producto Escalar (o Producto Punto) e involucra a dos magnitudes vectoriales cuyo producto resulta ser una magnitud escalar. La magnitud de dicho producto estará dada por:

$$W = |\bar{F}|\,|\bar{s}|\cos\theta$$

Comúnmente, $|\bar{F}|$ se denota por F y $|\bar{s}|$ por s.

A partir de la expresión matemática señalada podremos calcular el trabajo realizado mediante dos formas: como $(F\cos\theta)s$ o como $F(s\cos\theta)$. Esto nos indica que el trabajo puede calcularse de dos formas diferentes, cuyo resultado es el mismo.

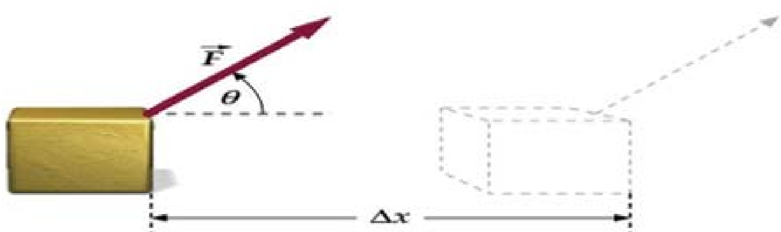

Figura 4. Trabajo efectuado por una fuerza constante sobre una partícula.

Multiplicando la magnitud del desplazamiento por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

$$W = (F\cos\theta)s$$

Multiplicando la magnitud de la fuerza por la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza.

$$W = F\,(s \cos \theta)$$

En cualquiera de los casos es importante visualizar que *para que haya trabajo debe haber una componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza o una componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.*

Observaciones

- Sí $\bar{s} = 0 \Rightarrow W = 0$ (no se realiza trabajo mientras se detiene un objeto pesado sin moverlo o empujando a una pared).
- $W = 0$ sí $\bar{F} \perp \bar{s}$ (no se realiza trabajo transportando una cubeta de agua horizontalmente).
- El signo de W depende de la dirección de $\bar{F}$ relativa a $\bar{s}$: $W > 0$ cuando la componente de $\bar{F}$ a lo largo de s está en la misma dirección que $\bar{s}$, y $W < 0$ cuando está en la dirección opuesta. Este signo aparece automáticamente si escribimos θ como el ángulo entre $\bar{F}$ y $\bar{s}$ y aplicamos $W = Fs \cos \theta$.
- El trabajo es máximo si $\bar{F}$ actúa en la misma dirección de $\bar{s}$, ya que $\cos \theta = \cos 0° = 1$.
- El trabajo es una magnitud escalar.
- En el Sistema Internacional (SI) las unidades del trabajo son los *Joules* (J) (1 *Joule* = 1 *Newton* • metro). En el sistema cgs las unidades son : 1 *erg* =1 *dina* • *cm*.

En el caso más general de que la fuerza no fuese constante, recurrimos a los procedimientos matemáticos del cálculo integral y considerando el trabajo total, realizado por valores constantes de fuerza a lo largo de una gran cantidad de desplazamientos infinitesimales tendríamos, para una dimensión:

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=1}^{N} F_n \, \Delta x$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$

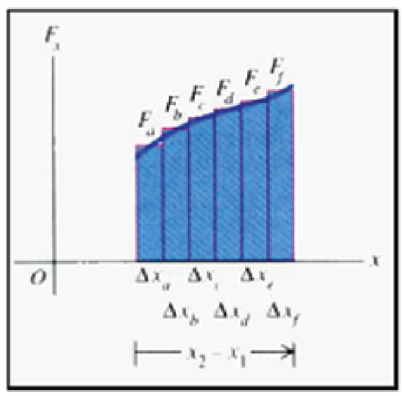

Figura 5. Trabajo como área bajo una curva realizado por valores constantes de fuerza a lo largo de desplazamientos infinitesimales.

finalmente, en forma más general, para tres dimensiones tendríamos,

$$W = \int \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

Un trabajo puede realizarse sobre un cuerpo de muchas formas y con diferentes resultados, en particular consideraremos dos situaciones:

Energía

• Energía cinética

a) ***Trabajo realizado para vencer la inercia de los cuerpos.*** Consideremos un cuerpo moviéndose con velocidad constante v_1 sobre una superficie horizontal sin fricción. Si ahora se le aplica una fuerza horizontal F, mientras recorre una distancia s, habrá alcanzado una velocidad v_2, (no se requiere tomar en cuenta la naturaleza vectorial de las variables involucradas). El trabajo realizado sobre el bloque estará dado por $W = Fs$, lo cual puede escribirse como:

$$S = \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}\right) \qquad mas = ma\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}\right)$$

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Una alternativa más formal sería:

$$W = \int_{v_1}^{v_2} F dx$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dt} dt$$

$$= m \int_{v_1}^{v_2} v dv$$

$$\therefore \; W = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right)$$

El término $\frac{1}{2} mv^2$ recibe el nombre de **energía cinética**.

$$K = \frac{1}{2} mv^2$$

De aquí que se concluya que el trabajo realizado por la fuerza resultante sobre el cuerpo es igual a la variación de la energía cinética de éste.

$$W = K_2 - K_1$$

$$W = \Delta K$$

- Una interpretación de ésta ecuación sería que la energía cinética se puede pensar como el trabajo que un objeto puede realizar mientras se detiene totalmente.
- Si la rapidez del objeto se incrementa ($v_2 > v_1$), entonces $W_{Tot} > 0$.
- Si $W_{Tot} < 0$ entonces el objeto se frena.
- Si el objeto mantiene su rapidez constante $W_{Tot} = 0$.

- **Energía potencial**

a) Energía Potencial Gravitacional

Trabajo realizado por el cambio de posición de un objeto, *en presencia de un campo de fuerza*. Consideremos ahora que se eleva un cuerpo de masa **m** desde la altura y_1 hasta la altura y_2. La fuerza constante que es necesario ejercer hacia arriba (para contrarrestar su peso) es mg. Despreciando la resistencia del aire y suponiendo que se eleva a velocidad constante (sin variación de su energía cinética), tendremos que el trabajo realizado es:

$$W = Fs$$

$$W = mg\,(y_2 - y_1)$$

$$W = mgy_2 - mgy_1$$

Esta expresión nos indica que podemos expresar el trabajo hecho sobre el cuerpo en términos de la cantidad mgy al inicio y al final de su desplazamiento. Esta cantidad es denominada la **energía potencial gravitacional**.

$$U_g = mgy$$

Una evidencia de que esta energía potencial gravitacional es una verdadera forma de energía sería soltar el cuerpo cuando se encuentra a la altura y_2, ya que observaríamos que regresa a su posición inicial con una energía cinética igual en magnitud al trabajo realizado para elevar el cuerpo.

b) Energía Potencial Elástica

Una situación similar se presenta cuando cambiamos la posición de un cuerpo unido al extremo de un resorte, aunque en este caso la fuerza aplicada no es constante, sino que su magnitud se rige por la ley de Hooke ($F = -kx$). Para determinar el trabajo total realizado sobre el cuerpo será necesario integrar la magnitud de la fuerza entre las dos posiciones en consideración.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} kx dx$$

$$W = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2$$

si su posición inicial es la del equilibrio en ($x = 0$), podríamos hablar de la **energía potencial elástica** de deformación del resorte como:

$$Ue = 1/2\ kX^2$$

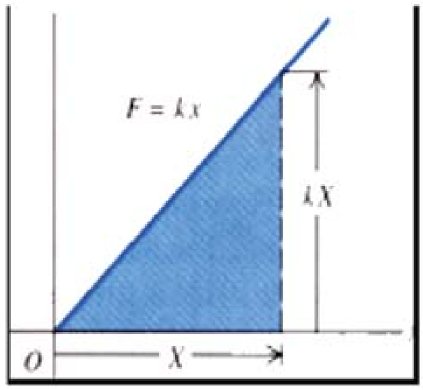

Figura 6. Trabajo realizado al estirar un resorte.

El trabajo hecho al estirar un resorte es igual al área del triángulo sombreado.

- Si el resorte se encuentra en la posición de equilibrio ($x = 0$), entonces $U=0$.
- Si el resorte no está en equilibrio U siempre será mayor que 0, $U>0$
- En posiciones simétricas de contracción o expansión la U es la misma.

De los ejemplos anteriores podemos concluir que, la energía potencial es la energía almacenada en un sistema a causa de la posición relativa u orientación de las partes del mismo sistema. En forma sintética se puede decir que es la energía de configuración de un sistema.

- **Tipos de energía**

Antes de que se reconociera claramente el papel de las interacciones moleculares y se entendiera la estructura atómica de la materia, los fisicos habían clasificado la energía en dos grupos: *mecánica*, correspondiente a la energía cinética y potencial gravitatoria y *no mecánica*, dividida en calor, energía química, energía eléctrica, radiación, etc. En la actualidad esta división ya no se justifica, pero por costumbre se sigue llamando *energía mecánica* a la cinética y las diferentes formas de energía potencial.

- **Fuerzas conservativas**

En los ejemplos que se presentaron con anterioridad, se manifiesta la idea de que hay una energía asociada con la posición de los cuerpos en un sistema. Los cambios en esta forma de energía pueden estar acompañados de cambios opuestos de energía cinética, (opuestos en el sentido de que si crece la energía potencial del sistema, disminuye su energía cinética y viceversa), de tal manera que la energía total del sistema permanece constante, es decir es conservada. Como hemos mencionado la energía asociada a la posición se denomina energía potencial y las fuerzas que pueden ser asociadas con esta forma de energía son llamadas **fuerzas conservativas**. *Un sistema en el cual la energía mecánica total, cinética y potencial, es constante, es denominado un sistema conservativo.*

En general las características del trabajo realizado por las fuerzas conservativas son,

- Siempre puede ser expresado como la diferencia entre los valores inicial y final de una función de energía potencial.
- Es independiente de la trayectoria del cuerpo y depende solo de los puntos inicial y final.
- Cuando los puntos inicial y, final son el mismo, el trabajo total es cero.

Además, en una dimensión, una fuerza conservativa está relacionada con la energía potencial a través de la expresión,

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

En general es posible afirmar que una fuerza conservativa puede ser derivada de una función de energía potencial escalar. Para los casos vistos con anterioridad:

$$U_g = mgy$$

$$F(y) = -\frac{dU_g}{dy}$$

$$F = -mg$$

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2$$

$$F(x) = -\frac{dU_e}{dx}$$

$$\therefore F(x) = -kx$$

Estas dos formas de energía constituyen ejemplos clásicos de **fuerzas conservativas**.

En un sistema en el cual solo actúan fuerzas conservativas la **energía** de dicho sistema *permanece constante* y solo sufre transformaciones entre trabajo, energía potencial y energía cinética, éste hecho se conoce como el *principio de la conservación de la energía mecánica.*

¿Piensa usted que se conserva la energía en un resorte que se estira y encoge?

• Fuerzas no conservativas

No todas las fuerzas en la Naturaleza son conservativas. Un ejemplo clásico de fuerzas que no tienen estas características lo constituyen las fuerzas de fricción. *No existe la posibilidad de generar una función de energía potencial para una fuerza de fricción.* Cuando deslizamos un cuerpo sobre una superficie en una dirección y luego lo regresamos al punto de partida, el trabajo total realizado por la fricción **no es cero**. Cuando invertimos la dirección del movimiento, lo mismo sucede con la fuerza de fricción y ésta realiza trabajo negativo en *ambas direcciones*. Este tipo de fuerzas son denominadas **no conservativas o disipativas**.

• Potencia

En la definición de trabajo no se especifica el tiempo empleado en realizarlo, sin embargo este puede ser un factor muy importante en la práctica. Para tomar en consideración la rapidez con que se realiza un trabajo se define un nuevo concepto: la *potencia*, que es la relación entre el trabajo realizado y el tiempo empleado en realizarlo.

Cuando se realiza una cantidad de trabajo ΔW en un intervalo de tiempo Δt, definimos la *potencia promedio* o trabajo por unidad de tiempo como

$$P_{prom} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Si la forma como se realiza el trabajo no es constante, podremos hablar de la *potencia instantánea* considerando intervalos de tiempo muy pequeños

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Las unidades de la potencia resultan ser joule / segundo, las cuales son denominadas watt.

1 watt = 1 joule / 1 segundo

Cinemática Rotacional: (Conceptos básicos)

- **Radián**

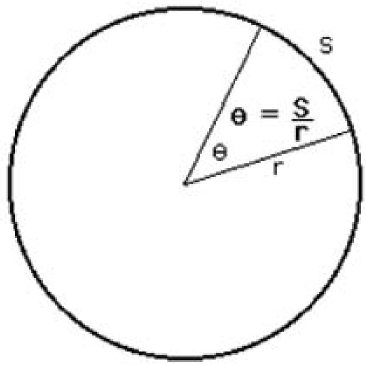

Figura 7. Relación entre longitud de arco y radio de giro.

La medición de un ángulo en radianes se realiza estableciendo la relación entre el *arco* (s) subtendido por el *ángulo* (q) y el *radio* del círculo (R) al cual pertenece.

$$\theta = \frac{s}{R}$$

Las unidades no son *físicas* sino *matemáticas* y se denominan **radianes**.

La relación entre los radianes y los grados puede establecerse a partir del ángulo que abarca un círculo completo,

Ángulo en grados	Ángulo en radianes
360°	$\theta = \frac{s}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ *rad*

De acuerdo a lo anterior, se pueden establecer valores comunes

180°	π *rad*
90°	$\frac{\pi}{2}$ *rad*
60°	$\frac{\pi}{3}$ *rad*
45°	$\frac{\pi}{4}$ *rad*
30°	$\frac{\pi}{6}$ *rad*

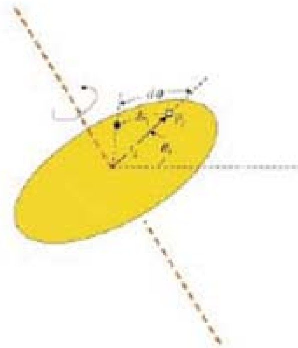

Figura 8. La velocidad angular y eje de giro.

- **Velocidad angular**

La variación del ángulo en el tiempo es la misma para todas las partículas y se denomina velocidad angular.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

en este caso ω (omega) representa la velocidad angular instantánea y sus unidades serán rad/s.

Si el movimiento se realiza con **velocidad angular constante**, se puede describir dicho movimiento mediante la expresión

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

- **Frecuencia y período**

También, en las condiciones de un movimiento con **velocidad angular constante**, podemos hablar de los **conceptos** de **frecuencia** y **período.**

a) Frecuencia (f): número de revoluciones o giros completos realizados por unidad de tiempo, sus unidades son los hertz (1 hertz = 1/s).

b) Período (T): tiempo necesario para realizar una revolución o giro completo, sus unidades son los segundos.

Estas dos cantidades están ligadas entre sí por la relación:

$$f = \frac{1}{T}$$

y la **velocidad angular constante** se puede expresar como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Por convención se considera que una velocidad angular es positiva si el movimiento se realiza en contra de las manecillas del reloj.

• Aceleración angular

Si la velocidad angular se modifica en el tiempo, tendremos una **aceleración angular** α:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

aquí α (alfa) representa la aceleración angular instantánea y sus unidades son rad/s^2.

Si la **aceleración angular es constante** se pueden obtener expresiones que relacionan dicha aceleración angular con las otras variables de rotación (ω, θ, t).

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega i}{t} \qquad \theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = \frac{\omega^2{}_f - \omega^2{}_i}{2\alpha} \qquad \theta = \left(\frac{\omega_i + \omega_f}{2}\right) t$$

• Velocidad tangencial

A las partículas de un cuerpo que está girando les podemos asociar una velocidad de traslación o lineal, la cual tiene una dirección tangente (de aquí el nombre de **velocidad tangencial**) a la trayectoria circular y cuya magnitud se puede determinar en la siguiente forma:

$$v_t = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\theta}{dt} = r\omega$$

habrá que recordar que por tratarse de una velocidad de traslación sus unidades serán m/s.

• Aceleración tangencial

De manera análoga la **aceleración tangencial** de cualquier partícula estará dada por:

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

y sus unidades, lógicamente, serán m/s^2.

• Aceleración centrípeta

En cualquier tipo de movimiento de rotación, *con velocidad angular constante* o *variable* todas las partículas del cuerpo sufrirán una aceleración de traslación o lineal que actuará en forma radial con dirección al centro del círculo descrito, ésta se denomina **aceleración centrípeta** y su magnitud está dada por:

$$a_c = \frac{v^2{}_t}{r}$$

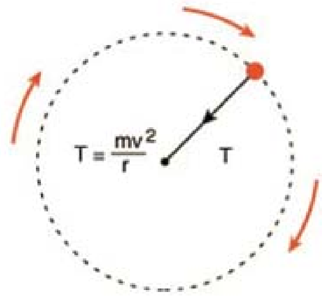

Figura 9. Aceleración centrípeta y el radio de giro

- **Aceleración total**

Si en un movimiento se presentan los dos tipos de aceleración, la **tangencial** y la **centrípeta,** estas dos se sumarían vectorialmente originando una ***aceleración total***.

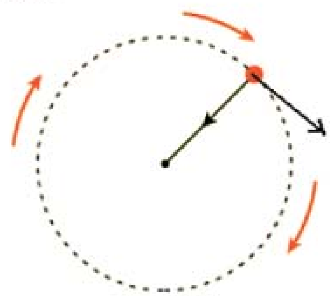

Figura 10. Aceleración tangencial

En este caso la magnitud de la aceleración total será:

$$\vec{a} = \sqrt{\vec{a}_t^{\,2} + \vec{a}_c^{\,2}}$$

y su dirección, con respecto a la dirección de la aceleración centrípeta

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{a_t}{a_c}$$

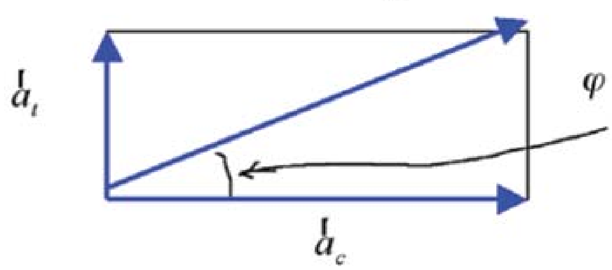

Figura 11. Vector aceleración total