APÉNDICE III. LAS ORBITAS PLANETARIAS ESTABLES. SEGÚN EHRENFEST

En los *Collected Scientific Papers* de Paul Ehrenfest, Martin Klein editó en 1959, en inglés, un artículo de Ehrenfest, originalmente publicado en 1920, en alemán, en los *Annalen der Physik,* bajo el título *Which roles does the three-dimensionality of area play in the basic laws of physics?*[1709] Ehrenfest prueba que solamente en un universo con tres dimensiones espaciales pueden existir órbitas planetarias estables. Él lleva a cabo sus pruebas con los métodos del cálculo vectorial en un sistema de coordenadas polares planas, en uso también hoy día, pero, lamentablemente, los símbolos matemáticos que él usa, y los grandes brincos en el razonamiento matemático, hacen inaccesible su análisis para la mayoría de los estudiosos de hoy, aún en el caso de que dominen el cálculo vectorial. Por otro lado, el artículo de Ehrenfest es importante en el contexto de la discusión sobre el *finetuning* del universo. Dada la importancia del asunto, y dado, además, que, en el Apéndice II sobre Kepler y Newton, he deducido desde los primeros principios axiomáticos, paso por paso, las ecuaciones que Ehrenfest da por supuestas, presento ahora una síntesis del análisis de Ehrenfest, con los mismos símbolos matemáticos usados en el Apéndice II y haciendo referencia a este apéndice para la derivación de algunas ecuaciones utilizadas por Ehrenfest. Lamentablemente, la traducción inglesa del original alemán es deficiente, quintando los dientes a las afirmaciones más contundentes de Ehrenfest, razón por la cual me baso en la versión original alemana para mi traducción de éstas.

De entrada, Ehrenfest presenta su hipótesis:

"Existe una diferencia característica entre dos o tres dimensiones [espaciales], por un lado, y un número de dimensiones mayor que tres, por otro lado, con respecto a la estabilidad de la órbita circular. Mientras en R_3 la órbita sigue siendo finita, cuando se produce una pequeña perturbación con una energía no demasiado grande (..), en el caso de R_4, R_5, R_6, etc., las órbitas circulares, aunque son, por supuesto, todavía posibles, se desbaratan ante la menor perturbación, encaminando al planeta en una espiral de caída en el cuerpo central, o hacia fuera, en el infinito" (Ehrenfest (1920):440-441).

Para probar su punto, Ehrenfest presenta la ley de gravitación universal de Newton para cualquier número de dimensiones espaciales n. Recordemos primero las ecuaciones de la gravitación universal y la energía gravitacional potencial de Newton:

(1) $\overline{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ (ecuación 34 del apéndice II) $\Rightarrow$

(2) la magnitud de la fuerza es: $F = \left|\overline{F}\right| = \frac{GMm}{r^2}$

(3) la energía potencial es: $U_g = \frac{-GMm}{r}$ (ecuación 89 del apéndice II)

Generalizando la (2) y la (3) para n dimensiones, obtenemos:

1709 Paul Ehrenfest, "In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?", en: Martin J. Klein, editor, *Paul Ehrenfest Collected Scientific Papers* (1959)

(4) $F = \frac{GMm}{r^{n-1}}$ (Ehrenfest: $F = x\frac{Mm}{r^{n-1}}$, 1920, p. 441 y 1959, p. 200)

(5) $U_g = \frac{-GMm}{(n-2)r^{n-2}}$ (Ehrenfest: $V(r) = -x\frac{Mm}{(n-2)r^{n-2}}$, 1920, p. 441 y 1959, p. 200)

Para lo que sigue hay que tomar en cuenta la siguiente propiedad del álgebra vectorial:

(6) $\hat{r} = \nabla r \Rightarrow \frac{d}{dr}\hat{r} = \frac{d\nabla r}{dr} = \nabla\frac{dr}{dr} = \nabla 1 = 0$

Tomando en cuenta (6), obtenemos (7):

$$\begin{aligned}\overline{F} &= -\frac{dU_g}{dr}\hat{r} = -\frac{d}{dr}\frac{-GMm}{(n-2)r^{n-2}}\hat{r} = \frac{GMm}{(n-2)}\frac{d}{dr}r^{-n+2}\hat{r} = \\ &= \frac{GMm}{(n-2)}[(-n+2)r^{-n+1}\hat{r} + r^{-n+2}\frac{d}{dr}\hat{r}] = -\frac{GMm}{r^{n-1}}\hat{r}\end{aligned} \quad (7)$$

Dado que:

(8) $\overline{F} = m\overline{a}$ (ecuación (8) del apéndice II)

se sigue que:

(9) $\overline{F} = m\overline{a} = -\frac{GMm}{r^{n-1}}\frac{\overline{r}}{r} = -\frac{dU_g}{dr}\hat{r}$

Ehrenfest presenta esta igualdad (9) sin mayor prueba, usando otros símbolos matemáticos:

(9E) $m\frac{d^2x_h}{dt^2} = -x\frac{Mm}{r^{n-1}}\frac{x_h}{r} = -\frac{\partial V}{\partial x_h}$ (Ehrenfest (1920, p. 441 y 1959, p. 201),

Ahora, Ehrenfest introduce las coordenadas polares planas y presenta dos ecuaciones sin explicar cómo las obtiene. En el Apéndice II, el lector encuentra la derivación de ambas:

(10) el momento angular: $\overline{L}_k = mr^2\dot{\theta}$ (ecuación (43) del apéndice II)

(11) la energía total del sistema: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\overline{L}_k^2}{mr^2} + U_g$ (ecuación 100 del apéndice II)

En la anotación de Ehrenfest, estas dos ecuaciones se presentan así:

(10E) $mr^2\dot{\phi} = \Theta$ (Ehrenfest, 1920, p.441; 1959, p. 201)

(11E) $\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = E$ (Ehrenfest, 1920, p. 441; 1959, p. 201)

De la (11) y la (5), se deriva la ecuación de la *velocidad radial* $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ de un planeta que gira alrededor de una estrella:

(12) $\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} - \frac{2U_g}{m} - \frac{\overline{L}_k^2}{m^2r^2} \Rightarrow$

(13) $\dot{r} = \pm\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2E}{m}r^2 + \frac{2GMm}{(n-2)}r^{4-n} - \frac{L_k^{\ 2}}{m^2}}$

Ehrenfest simplifica la ecuación (13), introduciendo $A = \frac{2E}{m}$; $B = \frac{2GMm}{(n-2)}$ y $C = \frac{L_k^{\ 2}}{m^2}$:

(14) $\dot{r} = \pm\frac{1}{r}\sqrt{Ar^2 + Br^{4-n} - C^2}$ (Ehrenfest, 1920, p. 441; 1959, p. 201; Ehrenfest no pone el signo $\pm$).

Ehrenfest no explica, pero sí usa el hecho de que *la energía total E, y, por lo tanto, A, pueden tener signos positivos o negativos,* según el valor de la excentricidad e, de la cual depende también el tipo de órbita de un objeto, por ejemplo un planeta, atraído por otro objeto central más masivo, por ejemplo una estrella. En cambio, para valores de $n \geq 3$, B y C siempre tienen valores positivos. Veamos este punto un poco más de cerca:

(15) la energía total es: $E = \frac{G^2M^2m^3(e^2-1)}{2L_k^{\ 2}}$ (ecuación 108 del apéndice II)

en donde e es la excentricidad de la elipse, que se define geométricamente por la relación entre el semi-eje mayor a y el semi-eje menor b y físicamente por la relación entre energía total E y momento angular L_k:

(16) $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL_k^{\ 2}}{G^2M^2m^3}}$ (ecuación 4 del apéndice I y ecuación 110 del apéndice II)

En el caso de un universo con tres dimensiones espaciales, existen cuatro posibilidades, explicadas en las ecuaciones (77) a (80) del apéndice II de este libro:

(17) $e = 0 \rightarrow E < 0$, cuando la órbita del objeto atraído por une fuerza central es un círculo
(18) $0 < e < 1 \rightarrow E < 0$, cuando la órbita del objeto es una elipse, que es el caso de la órbita estable de un planeta alrededor del Sol
(19) $e = 1 \rightarrow E = 0$, cuando la órbita del objeto es parabólica
(20) $e > 1 \rightarrow E > 0$, cuando la órbita es hiperbólica.

Por lo tanto, *en el caso de órbitas cerradas y estables, elípticas o circulares, la energía total es negativa.* Ehrenfest usa también el hecho de que en el caso de órbitas cerradas, el radio de la órbita varía entre un valor máximo $r_{\max}$ y un valor mínimo $r_{\min}$, de modo que la velocidad radial $\dot{r}$ puede tener un valor positivo, negativo o cero.

(21) el radio de la órbita: $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$ (ecuación 76 del apéndice II)

en donde e es la excentricidad y se define geométricamente en términos del semi-eje mayor a y la excentricidad e, y físicamente en términos de momento angular L_k y masa:

(22) $p = a(1-e^2) = {L_k}^2 \big/ GMm^2$ (ecuaciones 11 del apéndice I y 72 del apéndice II)

En la ecuación (21), p y e son constantes y el radio r (la distancia entre el planeta y la estrella, o entre la luna y el planeta), varía de un mínimo de $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$, cuando $\theta = 0^0$, a $r = p$, cuando $\theta = 0.5\pi\ (= 90^0)$ o $\theta = 1.5\pi\ (= 270^0)$, hasta un máximo de $r_{\max} = \frac{p}{1-e}$, cuando $\theta = \pi (= 180^0)$. Cuando el planeta pasa por el punto con el radio máximo, su velocidad radial es cero; a partir de este punto, la velocidad radial es positiva, hasta que llegue otra vez a cero en el punto del radio mínimo y de este punto hasta el punto del radio máximo, su valor es negativo.

Ahora bien, Ehrenfest presenta el siguiente razonamiento irrefutable. Para que un planeta tenga una órbita cerrada y estable, la órbita debe ser elíptica o circular. Para que la órbita sea elíptica, deben de existir dos valores del radio entre los cuales la velocidad radial varía de positivo a negativo, y vice-versa, pasando por cero. Si la velocidad radial siempre fuera positiva, el planeta caería en el Sol, y si siempre fuera negativa se alejaría del Sol para lanzarse al infinito sin jamás regresar. Para que pueda haber esta variación de la velocidad radial, de positiva a negativa, y vice-versa, deben de existir dos valores de r, es decir, un radio máximo y un radio mínimo de la órbita elíptica o casi-circular, para el cual la velocidad radial es cero. Esta posibilidad depende del valor del valor de $Ar^2 + Br^{4-n} - C^2$, que está bajo el signo de la raíz en la ecuación (14). Recuerde el lector que en una órbita elíptica o casi-circular, la energía total E, y por lo tanto Ar^2, es negativa y, en una órbita hiperbólica, siempre positiva. Para $n \geq 3$, B siempre es positivo, aunque el valor de Br^{4-n} tiende a cero, cuando aumenta el número de dimensiones ($n \geq 5 \to \infty$). Dado que C siempre es positivo, se sigue que $-C^2$ siempre es negativo. Por lo tanto, para que se dé una órbita estable (elíptica o casi-circular), deben cumplirse dos condiciones:

En primer lugar, *en dos ocasiones, la velocidad radial es cero:*

(23) $Ar^2 + Br^{4-n} - C^2 = 0 \Rightarrow Br^{4-n} = -Ar^2 + C^2 \Rightarrow \dot{r} = \pm\frac{1}{r}\sqrt{0} = 0$

En segundo lugar, *entre estos dos valores positivos de r, cuando la velocidad radial es cero, debe haber movimiento, es decir, la cantidad bajo la raíz debe ser positivo* ($Ar^2 + Br^{4-n} - C^2 > 0$). Si la cantidad bajo la raíz es positiva, la velocidad radial puede ser positiva o negativa:

(24) $Ar^2 + Br^{4-n} - C^2 > 0 \Rightarrow \dot{r}_1 = +\sqrt{Ar^2 + Br^{4-n} - C^2}$ y $\dot{r}_2 = -\sqrt{Ar^2 + Br^{4-n} - C^2}$

Los escenarios dependen grandemente del valor de Br^{4-n}, que a su vez depende grandemente del número de dimensiones n:

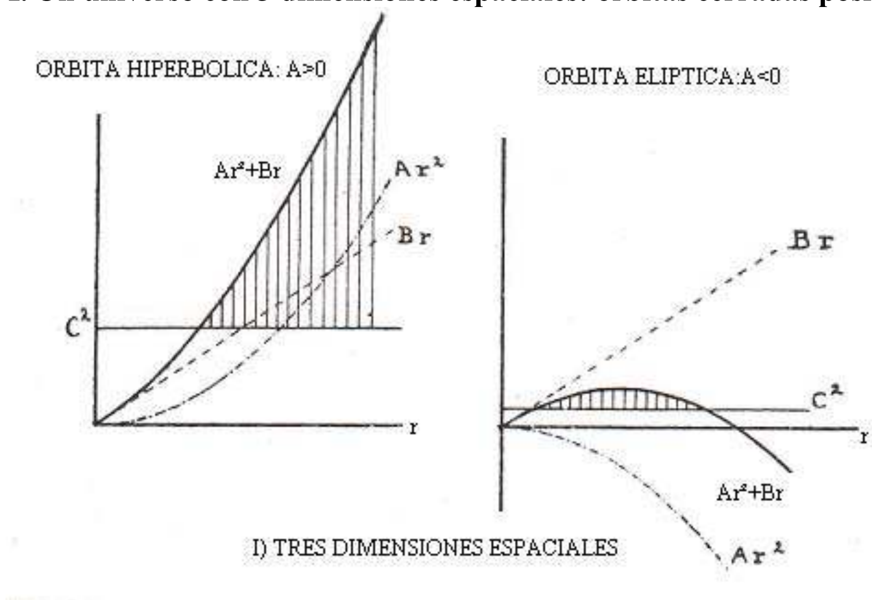
I) si $n = 3 \Rightarrow Br^{4-n} = Br$ (un valor linealmente ascendente);

II) si $n = 4 \Rightarrow Br^{4-n} = B$ (un valor constante, independiente de r); y

III) si $n > 4 \Rightarrow Br^{4-n} = \dfrac{B}{r^{n-4}}$ (un valor que rápidamente disminuye según aumenta el número de dimensiones espaciales).

Estos tres escenarios fueron graficados por Ehrenfest en la edición de 1959 de su artículo. En el eje vertical se miden Ar^2, Br^{4-n} y C^2, para $n = 3$, $n = 4$ y $n \geq 5$ y en el horizontal se mide el radio r. En la primera gráfica, observamos que se cumplen las dos condiciones necesarias para que pueda existir una órbita elíptica estable, a saber, 1) existen dos valores positivos de r, donde $Ar^2 + Br^{4-n} - C^2 = 0$ y, por lo tanto, $Ar^2 + Br^{4-n} = C^2$>; y 2) entre estos dos valores positivos, $Ar^2 + Br^{4-n} - C^2 > 0$, de modo que allí existe movimiento y velocidad radial (positiva o negativa, porque $\dot{r} = \pm \frac{1}{r}\sqrt{cantidad.positiva}$:

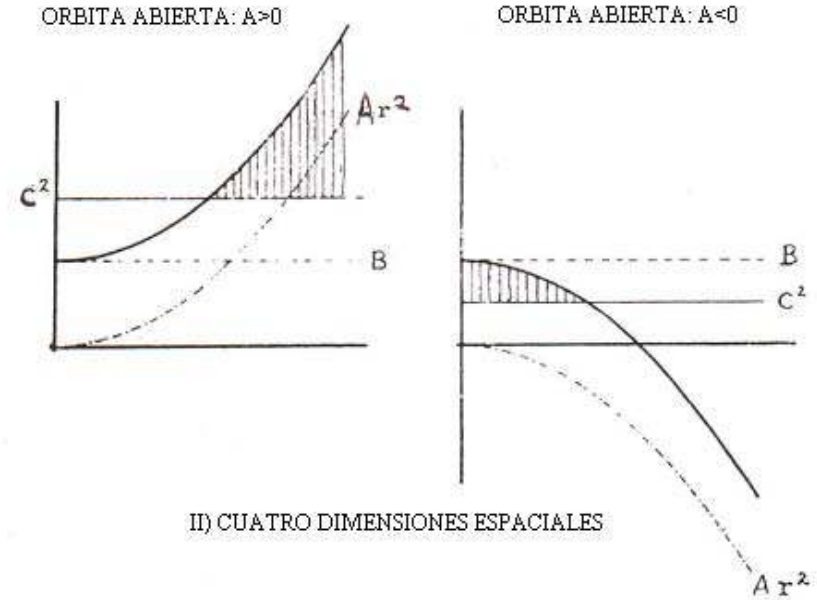
Gráfica I. Un universo con 3 dimensiones espaciales: órbitas cerradas posibles[1710]



En la siguiente gráfica observamos que no existen dos valores de r, entre los cuales $Ar^2 + Br^{4-n} - C^2 > 0$, de modo que *no existen órbitas cerradas*. Sí es posible que para determinado magnitud de r la velocidad radial *siempre* es positiva (el planeta se cae en la estrella) o *siempre* es negativa (el planeta se lanza al infinito):

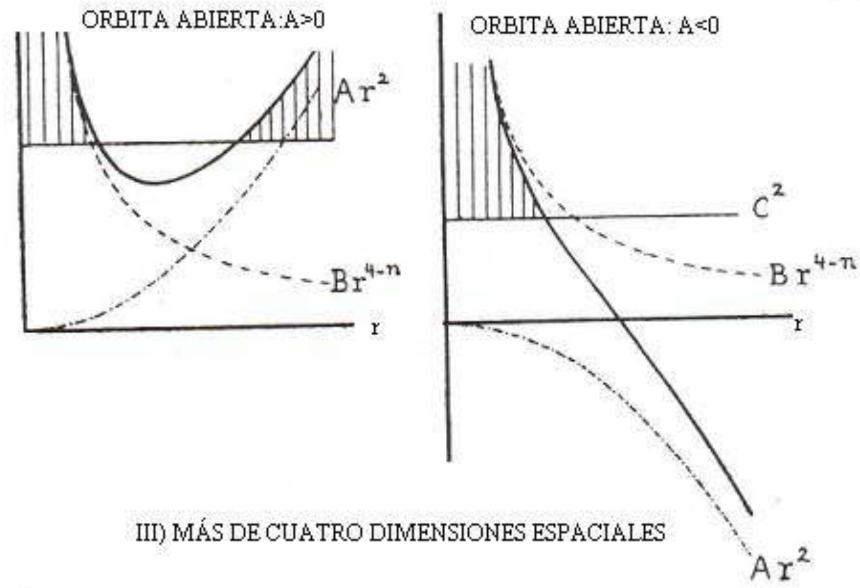
[1710] Adaptada de Paul Ehrenfest, "In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?", en: Martin J. Klein, ed., *Paul Ehrenfest Collected Scientific Papers* (1959)

Gráfica II. Un universo con 4 dimensiones espaciales: órbitas elípticas imposibles [1711]



En la gráfica III observamos lo mismo que en la gráfica II, a saber, *no existen órbitas cerradas:*

Gráfica III. Un universo con $n \geq 5$ dimensiones espaciales: órbitas elípticas imposibles[1712]



[1711] Adaptada de Paul Ehrenfest, "In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?", en: Martin J. Klein, ed., *Paul Ehrenfest Collected Scientific Papers* (1959)
[1712] Adaptada de Paul Ehrenfest, "In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?", en: Martin J. Klein, ed., *Paul Ehrenfest Collected Scientific Papers* (1959)

La siguiente tabla sintetiza los hallazgos más importantes de Ehrenfest:

Tabla. Síntesis de algunas conclusiones de Ehrenfest

n	existen dos valores positivos de r donde $Ar^2 + Br^{4-n} = C^2$	órbitas elípticas son posibles	movimientos posibles hacia la estrella o hacia el infinito
$n = 3$	si	si	si
$n = 4$	no	no	si
$n \geq 5$	no	no	si