APÉNDICE IV. LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN UN SOLO SISTEMA AXIOMATICO

Por John Auping con base en dos artículos de José Heras Gómez [1713]

Este apéndice tiene cinco partes:

I. Introducción: las ecuaciones fundamentales de Maxwell y de la fuerza de Lorentz y de la conservación de la carga
II. Formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell y de la ecuación de continuidad
III. Derivación de las ecuaciones de Maxwell de la ecuación de continuidad
III.1.Las ecuaciones tensoriales de Maxwell son compatibles con la de continuidad
III.2.Las dos ecuaciones tensoriales se derivan de la ecuación de continuidad
IV. Las ecuaciones de onda de los campos eléctrico y magnético
V. Potenciales electromagnéticos
VI. El carácter axiomático del electromagnetismo

I. INTRODUCCION: LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES DE MAXWELL Y DE LA FUERZA DE LORENTZ Y DE LA CONSERVACIÓN DE LA CARGA

Si aceptamos la convención tradicional de escribir los campos a determinar en el lado izquierdo de las ecuaciones y las fuentes especificadas en el lado derecho, entonces la manera apropiada de escribir ***las cuatro ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica en el espacio tridimensional*** con el Sistema Internacional de unidades es la siguiente:

(I_{ED}) $\nabla \bullet \overline{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Ley de Gauss en electricidad)

(II_{ED}) $\nabla \times \overline{E} + \dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0$ (Ley de inducción de Faraday)

(III_{ED}) $\nabla \bullet \overline{B} = 0$ (Ley de Gauss en magnetismo)

(IV_{ED}) $\nabla \times \overline{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \mu_0 \overline{J}$ (Ley de Ampère-Maxwell)

donde $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$; $\overline{E}$ es el campo eléctrico; $\overline{B}$ el campo magnético; ρ es la densidad de carga (función escalar); y $\overline{J}$ la densidad de corriente (función vectorial). Las ecuaciones II y III son homogéneas (porque tienen fuente = cero), y la I y IV son no-homogéneas (porque tienen fuente no-cero). El sistema I_{ED}-IV_{ED} es un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales y acopladas en los campos eléctrico y magnético.

En el caso importante de la **electrostática** y **magnetostática**, los campos y fuentes son independientes del tiempo ($\dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} = 0$ y $\dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0$), y dependen solo de las coordenadas espaciales. Por lo tanto, el sistema I_{ED}-IV_{ED} se transforma en el sistema I_{ES}-IV_{ES}, de la siguiente manera:

(I_{ES}) $\nabla \bullet \overline{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

[1713] José Heras, 2007, "Can Maxwell's equations be obtained from the continuity equation?" en: *American Journal of Physics,* vol. 75 (2007): 652-657; y José Heras, "How to obtain the covariant form of Maxwell's equations from the continuity equation", en: *European Journal of Physics*, vol. 30 (2009): 845-854

(II$_{ES}$) $\nabla \times \overline{E} = 0$
(III$_{ES}$) $\nabla \bullet \overline{B} = 0$
(IV$_{ES}$) $\nabla \times \overline{B} = \mu_0 \overline{J}$

En el caso de una onda electromagnética muy alejada de su fuente, **sin fuente** para fines prácticos, la carga y la corriente son ceros, de modo que las ecuaciones son todas homogéneas:

(I$_{SF}$) $\nabla \bullet \overline{E} = 0$

(II$_{SF}$) $\nabla \times \overline{E} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0$

(III$_{SF}$) $\nabla \bullet \overline{B} = 0$

(IV$_{SF}$) $\nabla \times \overline{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = 0$

Tradicionalmente, ***la teoría electromagnética es dual***, es decir, ***consiste de dos axiomas independientes***, a saber, las ecuaciones de campo (las ecuaciones de Maxwell) y la ecuación de fuerza. Vectorialmente, ***la fuerza de Lorentz*** entre el campo electromagnético y una carga eléctrica se representa por la siguiente ecuación[1714]:
(V) $\overline{F}_{EM} = q\left(\overline{E} + \overline{v} \times \overline{B}\right)$ (ecuación de la fuerza de Lorentz)

La ecuación de continuidad (un principio matemático) es la representación matemática de la conservación de la carga (un principio físico). Las ecuaciones I_{ED} *e* IV_{ED} *implican la ecuación de continuidad:*

(VIA) $\nabla \bullet \{\nabla \times \overline{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}\} = \nabla \bullet (\mu_0 \overline{J}) \Rightarrow \nabla \bullet (\nabla \times \overline{B}) - \left(\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = \nabla \bullet \left(\frac{\overline{J}}{\varepsilon_0 c^2}\right)$

Dado que $\nabla \bullet (\nabla \times \overline{B}) = 0$, se sigue que:

(VIB) $\nabla \bullet \overline{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \overline{0}$ (ecuación de la conservación de la carga)

En vista de la demostración anterior (ecuaciones de Maxwell $\Rightarrow$ ecuación de continuidad) la mayoría de los libros insisten en decir que la conservación de la carga (ecuación de continuidad) no es un principio independiente sino una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, para obtener la ecuación de Ampere-Maxwell IV$_{ED}$, los libros recurren a la conservación de carga. Se tiene entonces un argumento circular: para derivar las ecuaciones de Maxwell recurrimos a la conservación de la carga y para derivar la conservación de la carga recurrimos a las ecuaciones de Maxwell.

[1714] David Griffith, *Introduction to Eletrodynamics*. (1999): 204

II. FORMULACIÓN COVARIANTE DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL Y LA DE CONTINUIDAD

El campo electromagnético se define por el siguiente tensor antisimétrico:

$$(1)\, F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} ...0..........B_3.... - B_2....... - E_1/c \\ - B_3.........0.........B_1....... - E_2/c \\ ...B_2..... - B_1........0......... - E_3/c \\ ...E_1/c....E_2/c....E_3/c.......0 \end{pmatrix} \text{ tensor de campo electromagnético}$$

Ahora bien, el tensor dual del campo electromagnético se calcula con

$$(2)\ {}^*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

donde $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ es el símbolo de Levi-Civita, que, partiendo de $\varepsilon^{1234} = 1$, se define como:

1) $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = 1$, si hay un número par de conmutaciones de dos índices

2) $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = -1$, si hay un número impar de dos índices

3) $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = 0$, en todos los demás casos (por ejemplo cuando el mismo índice se repite)

$$(3)\, {}^*F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} ....0......... - E_3/c.......E_2/c....... - B_1 \\ ...E_3/c.......0.......... - E_1/c....... - B_2 \\ - E_2/c.......E_1/c........0............ - B_3 \\ ...B_{.1}..........B_2...........B_3..............0 \end{pmatrix} \text{tensor dual de campo electromagnético}$$

Definimos ahora el cuadrivector carga-corriente $J^\alpha (\equiv J^i, c\rho)$, que representa la fuente del campo $F^{\alpha\beta}$. Un teorema del cálculo tensorial[1715] dice que un tensor antisimétrico en el espacio-tiempo de Minkowski queda determinado al especificar las cantidades :

$$(4) \qquad \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \text{ y}$$

$$(5) \qquad \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_\alpha{}^\beta}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F^\gamma{}_\alpha}{\partial x^\beta}$$

[1715] Donald Kobe (1984), "Helmholtz theorem for antisymmetric second-rank tensor fields and electromagnetism with magnetic monopoles," en: *American Journal of Physics,* vol. 52 (1990): 354-358; y José Heras, "A short proof of the generalized Helmholtz theorem," *American Journal of Physics,* vol. 58 (1990): 154-155

La primera cantidad (4) se llama divergencia de $F^{\alpha\beta}$ y la segunda cantidad (5) es una relación cíclica. Si especificamos la primera cantidad como

$$(6)\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \mu_0 J^{\alpha} \quad \textbf{\textit{(ecuaciones no-homogéneas)}}$$

y la segunda cantidad como:

$$(7)\frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F_{\alpha}{}^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial F^{\gamma}{}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0 \quad \textbf{\textit{(ecuaciones homogéneas)}}$$

La conservación de la carga se representa matemáticamente por la ecuación de continuidad:

$$\text{(VI)}\ \nabla \bullet \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial J^{i}}{\partial x^{i}} + \frac{c\partial \rho}{c\partial t} = 0 \ \Rightarrow$$

$$(8)\ \frac{\partial J^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0 \quad (J^{\beta} \equiv (J^{i}, c\rho)) \quad \textbf{\textit{(ecuación tensorial de la conservación de la carga)}}$$

Las ecuaciones (6) y (7) representan la formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell, en forma tensorial y la (8) es la ecuación tensorial de la conservación de la carga. La ecuación (6) representa las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas y la ecuación (7) las homogéneas.

Con relación al tensor antisimétrico $F^{\alpha\beta}$ es pertinente hacer el siguiente comentario general. Un tensor arbitrario en un espacio de cuatro dimensiones y tiene 16 componentes. Si este tensor es simétrico entonces solo 10 de sus 16 componentes son independientes. Si el tensor es antisimétrico entonces solo 6 de sus 16 componentes son independientes, porque $F^{12} = -F^{21}, F^{13} = -F^{31}, F^{14} = -F^{41}, F^{23} = -F^{32}, F^{24} = -F^{42}, F^{34} = -F^{43}$ y los elementos de la traza son nulos, a saber, $F^{11} = F^{22} = F^{33} = F^{44} = 0$. Al tener seis componentes independientes en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, un tensor antisimétrico es particularmente apto para representar el campo eléctrico E y el campo magnético B. Cada campo contribuye con 3 componentes independientes. Pero, el hecho que un tensor antisimétrico en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones es apto para representar los campos eléctrico y magnético, solamente significa que es *compatible* con las ecuaciones de Maxwell y falta todavía *derivar* este tensor, *independientemente* de las ecuaciones de Maxwell.

Verifiquemos ahora que la formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell en cuatro dimensiones (del espacio-tiempo) reproduce fielmente la formulación usual de tres dimensiones espaciales. Para demostrar que la ecuación tensorial (6) reproduce las ecuaciones diferenciales inhomogéneas hacemos $\alpha = 4$:

$$(9)\frac{\partial F^{4\beta}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial F^{41}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial F^{42}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial F^{43}}{\partial x^{3}} + \frac{\partial F^{44}}{\partial x^{4}} = \mu_0 J^{4} \Rightarrow$$

$$(10)\frac{\partial F^{4\beta}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial\, {E_1}/{c}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial\, {E_2}/{c}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial\, {E_3}/{c}}{\partial x^{3}} + 0 = \mu_0 c\rho \Rightarrow$$

$(\mathrm{I_{ED}})\nabla \bullet E_i = \mu_0 c^2 \rho = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (i = 1,2,3)$

Para obtener la ecuación (IV), sustituimos en (6), $\alpha = 1,2,3$

$$(11)\frac{\partial F^{1\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{14}}{\partial x^4} = \mu_0 J^1$$

$$(12)\frac{\partial F^{2\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial F^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{24}}{\partial x^4} = \mu_0 J^2$$

$$(13)\frac{\partial F^{3\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial F^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{33}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{34}}{\partial x^4} = \mu_0 J^3$$

Usando 1 en (11), (12) y (13), obtenemos:

$$(14)\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial \, E_1/c}{\partial x^4} = \mu_0 J^1$$

$$(15) - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} + \frac{\partial B_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \, E_2/c}{\partial x^4} = \mu_0 J^2$$

$$(16)\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \, E_3/c}{\partial x^4} = \mu_0 J^3$$

Agrupando (14), (15) y (16), y tomando en cuenta que $\partial / \partial x^4 = (1/c)\partial / \partial t$, obtenemos:

$$(\mathrm{IV_{ED}}) \ \nabla \times B_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_i}{\partial t} = \mu_0 J^i \qquad (i = 1,2,3)$$

A continuación se comprobará cómo la segunda ecuación tensorial (7) contiene las ecuaciones II y III de Maxwell. Recordemos la ecuación tensorial:

$$(7) \quad \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F^{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} = 0$$

Para obtener la (III), sustituimos en (7) $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$

$$(17)\frac{\partial F^{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^2} = 0 \ \Rightarrow$$

$$(18)\frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$(\mathrm{III_{ED}}) \quad \nabla \bullet B_i = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

Para obtener (II), sustituimos en (7) $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 4$, $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 4$ &

$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 4$:

$$(19)\ \frac{\partial F^{34}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^4} + \frac{\partial F^{42}}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow$$

$$(20)\ -\frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial x^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_3}{\partial x^2} + \frac{\partial B_1}{\partial t} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} = 0 \qquad \text{(el elemento } \hat{\imath}\text{)}$$

$$(21)\ \frac{\partial F^{34}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^4} + \frac{\partial F^{41}}{\partial x^3} = 0$$

$$(22)\ -\frac{1}{c}\frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{1}{c}\frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial x^3} = 0 \quad \Rightarrow -\frac{\partial E_3}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial x^3} = 0 \quad \text{(el elemento } \hat{\jmath}\text{)}$$

$$(23)\quad \frac{\partial F^{24}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^4} + \frac{\partial F^{41}}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$(24)\ -\frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial x^1} + \frac{1}{c}\frac{\partial B_3}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial x^2} = 0\ \frac{\partial E_2}{\partial x^1} + \frac{\partial B_3}{\partial t} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{(el elemento } \hat{k}\text{)}$$

Las ecuaciones escalares (20), (22) y (24) se pueden representar vectorialmente, mediante un producto rotacional:

$$(25)\quad \nabla \times \overline{E} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} ...\hat{\imath}.........\hat{\jmath}..........\hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x^1}.....\frac{\partial}{\partial x^2}....\frac{\partial}{\partial x^3} \\ E_1........E_2.......E_3 \end{pmatrix} = (\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3})\hat{\imath} - (\frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3})\hat{\jmath} + (\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2})\hat{k}$$

$$+ \frac{\partial B_1}{\partial t}\hat{\imath} + \frac{\partial B_2}{\partial t}\hat{\jmath} + \frac{\partial B_3}{\partial t}\hat{k}$$

lo que nos da la segunda ecuación de Maxwell:

$$(\text{II}_{\text{ED}})\quad \nabla \times E_i + \frac{\partial B_i}{\partial t} = 0\ \ (i = 1,2,3) \ \Rightarrow\ \nabla \times \overline{E} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0$$

III. DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Podríamos hacer la derivación mencionada en el espacio tridimensional, usando vectores, pero este camino es muy largo. Por eso, optamos por el camino espacial-temporal, en forma tensorial. Ya demostramos que las cuatro ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como dos ecuaciones tensoriales en el espacio-tiempo de Minkowski (véase arriba sección II). Ahora nos toca derivar estas dos ecuaciones a partir de la ecuación tensorial de continuidad (sección III.1); después, para no caer en *petitio principii,* demostramos que el tensor del campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$ (ver a continuación la ecuación VI) que usamos para llegar de las dos ecuaciones tensoriales a las cuatro ecuaciones diferenciales de Maxwell, se deriva, en forma independiente de estas últimas, de la ley de Coulomb-Lorentz (sección III.2).

III.1. LAS DOS ECUACIONES TENSORIALES SON COMPATIBLES CON LA ECUACIÓN TENSORIAL DE CONTINUIDAD

En ***forma tensorial, la ecuación de la conservación de la carga*** está implícita en las ecuaciones homogéneas de Maxwell, y es compatible con ellas:

$$(8)\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial J^{i}}{\partial x^{i}} + \frac{c\partial \rho}{c\partial t} = \nabla \bullet J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (J^{\beta} \equiv (J^{i}, c\rho))$$

Pero, la *compatibilidad* no nos dice que las ecuaciones de Maxwell *se derivan* de la ecuación de continuidad. Esta derivación se llevará a cabo a continuación.

Los objetos x^{α} y x'^{α} representan dos cuadrivectores, a saber el de cualquier punto en el campo electromagnético y el del punto fuente --donde está la carga--, respectivamente. Recordemos, con respecto a estos objetos, 15 reglas del álgebra tensorial:

a.- ∂x^{α} es una derivada contravariante;

b.- $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ es una derivada covariante;

c.- ∂x_{α} es una derivada covariante;

d.- $\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$ es una derivada contravariante;

e.- $\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}}$ y $\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$

f.- en el caso de este ensayo, $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_{i}}, \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \eta^{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_{i}}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$:

(métrica +,+,+,- y no hay suma sobre alpha)

g.- J^{α} es un tensor contravariante y J_{α} es un tensor covariante;

h.- $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} J^{\alpha}$ es la derivada covariante de un tensor contravariante.

i.- definimos una función $D \equiv D(x - x')$ (la función de Green que depende de la diferencia de dos puntos) de tal manera que se cumpla que tenga dos propiedades, a saber i y j; esta función es $D(x, x') = \frac{\delta(t' - t + R/c)}{4\pi R}$ y las dos propiedades son:

j.- $\frac{\partial D}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{\partial D}{\partial x'^{\alpha}}$ y

k.- $\frac{\partial^2 D}{\partial x_{\alpha} \partial x^{\alpha}} = \frac{\partial^2 D}{\partial x_{\alpha} \partial x^{\alpha}} = \delta(x^{\alpha} - x'^{\alpha})$

l.- $\int f(x'^{\alpha})d^4x'^{\alpha} = \int f(x'^{\alpha})d^3x'^{i}\int f(x'^{\alpha})dx'^{4}$ en donde la primera integral es el volumen y la segunda el tiempo, ambos de ∞ a $-\infty$

m.- Teorema de Gauss: $\int \nabla \bullet \overline{A}dV = \int \overline{A} \bullet d\overline{S}$

n.- Delta de Dirac: $\int \delta(x - x')dx' = 1$ si $x = x'$ y es 0 si $x \neq x'$; y análogamente:

$\int f(x'^{\alpha})\delta(x^{\alpha} - x'^{\alpha})dx'^{\alpha} = f(x^{\alpha})$ si $x^{\alpha} = x'^{\alpha}$ y es 0 si $x^{\alpha} \neq x'^{\alpha}$;

p.- En los puntos (a) hasta (m), podemos, obviamente, sustituir α por β. Es importante recordar, además, que $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$.

Recordemos la ecuación tensorial de la conservación de la carga:

(8) $\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'^{\beta}} = 0$ (recuerda: $J^{\beta} \equiv (J^{i}, c\rho) \Rightarrow J_{\beta} \equiv (J_{i}, -c\rho)$)

Derivamos ambos lados de (8) con $\frac{\partial}{\partial x'_{\alpha}}$:

(26) $\frac{\partial^2 J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}\partial x'^{\beta}} = 0$

Multiplicamos ambos lados de (26) con $-D$:

(27) $-D\frac{\partial^2 J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}\partial x'^{\beta}} = 0$

Ahora sumamos a ambos lados de la ecuación $J^{\alpha}\frac{\partial^2 D}{\partial x'_{\beta}\partial x'^{\beta}}$:

(28) $J^{\alpha}\frac{\partial^2 D}{\partial x'_{\beta}\partial x'^{\beta}} - D\frac{\partial^2 J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}\partial x'^{\beta}} = J^{\alpha}\frac{\partial^2 D}{\partial x'_{\beta}\partial x'^{\beta}}$

Ahora reescribiremos los dos términos del lado izquierdo de (28) como sigue:

(29) $-\frac{\partial D}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} - \frac{\partial D}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x'^{\beta}}\left(D\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} - J^{\alpha}\frac{\partial D}{\partial x'_{\beta}}\right)$

Prueba:

(30) $-\frac{\partial D}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} - \frac{\partial D}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x'^{\beta}}\left(D\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} - J^{\alpha}\frac{\partial D}{\partial x'_{\beta}}\right) =$

$$= -\frac{\partial D}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} + \frac{\partial D}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} + \left(-\frac{\partial D}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} - D\frac{\partial^2 J^{\beta}}{\partial x'^{\beta}\partial x'_{\alpha}} + \frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial D}{\partial x'_{\beta}} + J^{\alpha}\frac{\partial^2 D}{\partial x'^{\beta}\partial x'_{\beta}} \right) =$$

$$= \left(-D\frac{\partial^2 J^{\beta}}{\partial x'^{\beta}\partial x'_{\alpha}} + J^{\varepsilon}\frac{\partial^2 D}{\partial x'^{\beta}\partial x'_{\beta}} \right) \quad \text{Q. E. D.}$$

Ahora combinamos (28) y (29) para obtener la siguiente identidad básica[1716]:

(31) $$\frac{\partial D}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} - \frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} \right) = \frac{\partial}{\partial x'^{\beta}}\left(D\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} - J^{\alpha}\frac{\partial D}{\partial x'_{\beta}} \right) + J^{\alpha}\frac{\partial^2 D}{\partial x'_{\beta}\partial x'^{\beta}}$$

Ahora multiplicamos los términos con μ_0 e integramos sobre todo el espacio-tiempo d^4x':

(32) $$\int \mu_0 \frac{\partial D}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} - \frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} \right) d^4x' = \int \mu_0 \frac{\partial}{\partial x'^{\beta}}\left(D\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} - J^{\alpha}\frac{\partial D}{\partial x'_{\beta}} \right) d^4x' + \int \mu_0 J^{\beta}\frac{\partial^2 D}{\partial x'_{\beta}\partial x'^{\beta}} d^4x'$$

Dado que el operador $\partial / \partial x^{\beta}$ puede salir del signo de integral, veremos cada uno de los tres términos de (32) por separado, empezando con la del lado izquierdo de la ecuación:

(33) $$\int \mu_0 \frac{\partial D}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} - \frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} \right) d^4x' = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \mu_0 \int D\left(\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} - \frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} \right) d^4x'$$

Para el segundo término de (32), hemos de recordar el teorema de Gauss (punto k arriba). Por el teorema de Gauss, la integral del espacio-tiempo cuatridimensional se transforma en la integral de una superficie tridimensional. Los términos de esta integral que se encuentran entre paréntesis $\left(D\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} - J^{\alpha}\frac{\partial D}{\partial x'_{\beta}} \right)$ representan cargas y corrientes finitas. Al integrar $\left(D\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} - J^{\alpha}\frac{\partial D}{\partial x'_{\beta}} \right)$, que es un tensor de dos índices en cuatro dimensiones, sobre $d\bar{S}$, que es una superficie de tres dimensiones, bajamos el número de dimensiones de cuatro a tres. Es como si extendiéramos estas cargas y corrientes finitas sobre una superficie infinita, razón por la cual esta integral del segundo término de (32) resulta ser cero:

(34) $$\int \mu_0 \frac{\partial}{\partial x'^{\beta}}\left(D\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} - J^{\alpha}\frac{\partial D}{\partial x'_{\beta}} \right) d^4x' = \mu_0 \int \left(D\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} - J^{\alpha}\frac{\partial D}{\partial x'_{\beta}} \right) dS_{\beta} \rightarrow 0$$

Ahora analizamos la tercera integral (aplicando los puntos i y n de arriba):

(35) $$\int \mu_0 J^{\alpha}\frac{\partial^2 D}{\partial x'_{\beta}\partial x'^{\beta}} d^4x' = \mu_0 \int J^{\alpha}\delta(x^{\beta} - x'^{\beta}) d^4x' = \mu_0 J^{\alpha}$$

[1716] José Heras (2008), "The exact relationship between the displacement current and the conduction current", en: *American Journal of Physics*, vol. 76 (2008): 3, ecuación 8

Combinando (33), (34) y (35), reescribiremos (32) como (36):

$$(36)\qquad \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\mu_0\int D\left(\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'_{\beta}}-\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}}\right)d^4x' = 0+\mu_0 J^{\alpha}$$

Definimos ***el tensor anti-simétrico de cuatro dimensiones***:

$$(37)\qquad F^{\alpha\beta} = \mu_0\int D\left(\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'_{\beta}}-\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}}\right)d^4x'$$

Sustituimos (37) en (36) para obtener (38):

$$(38)\quad \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \mu_0 J^{\alpha}$$

Recordemos:

$$(6)\quad \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \mu_0 J^{\alpha}$$

Comparando (6) y (38), consta que la primera ecuación tensorial de Maxwell (6=38), es compatible con la ecuación de la conservación de la carga (la 8), siempre y cuando el tensor $F^{\alpha\beta}$ *en (38) se identifique como:*

$$(1)\, F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} ....0.........B_3....... -B_2.......-E_1/c \\ -B_3........0...........B_1.......-E_2/c \\ ...B_2....-B_1..........0.........-E_3/c \\ ..E_1/c....E_2/c......E_3/c........0 \end{pmatrix}$$

El problema es que no podemos adoptar esta identificación, apoyándonos en las ecuaciones de Maxwell, porque caeríamos en un *petitio principii.* Todavía falta derivar este tensor $F^{\alpha\beta}$ independientemente de las ecuaciones de Maxwell.

Lo mismo podemos hacer con la segunda ecuación tensorial, es decir, comprobar su compatibilidad con $F^{\alpha\beta}$ (el tensor de la ecuación 1). Recordemos:

$$(37)\qquad F^{\alpha\beta} = \mu_0\int D\left(\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'_{\beta}}-\frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}}\right)d^4x'$$

Derivamos ambos lados con $\frac{\partial}{\partial x_\gamma}$:

$$(39)\ \frac{\partial}{\partial x_\gamma}F^{\alpha\beta} = \mu_0\int\frac{\partial D}{\partial x_\gamma}\left(\frac{\partial J^\alpha}{\partial x'_\beta}-\frac{\partial J^\beta}{\partial x'_\alpha}\right)d^4x'$$

Con base en la propiedad i, obtenemos:

$$(40)\ \frac{\partial}{\partial x_\gamma}F^{\alpha\beta} = -\mu_0\int\{\frac{\partial D}{\partial x'_\gamma}\}\left(\frac{\partial J^\alpha}{\partial x'_\beta}-\frac{\partial J^\beta}{\partial x'_\alpha}\right)d^4x'$$

Ahora bien, se sabe que:

$$(41)\quad \frac{\partial}{\partial x'_\gamma}\{D\left(\frac{\partial J^\alpha}{\partial x'_\beta}-\frac{\partial J^\beta}{\partial x'_\alpha}\right)\} = \{\frac{\partial D}{\partial x'_\gamma}\}\left(\frac{\partial J^\alpha}{\partial x'_\beta}-\frac{\partial J^\beta}{\partial x'_\alpha}\right)+\ D\left(\frac{\partial^2 J^\alpha}{\partial x'_\gamma\partial x'_\beta}-\frac{\partial^2 J^\beta}{\partial x'_\gamma\partial x'_\alpha}\right)$$

El primer término del lado derecho de (41) es igual al integrando del lado derecho de (40). Sustituimos la diferencia del primer y tercer término de (41) en (40):

$$(42)\ \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = -\mu_0\int\frac{\partial}{\partial x'_\gamma}\{D\left(\frac{\partial J^\alpha}{\partial x'_\beta}-\frac{\partial J^\beta}{\partial x'_\alpha}\right)\}d^4x' + \mu_0\int D\left(\frac{\partial^2 J^\alpha}{\partial x'_\gamma\partial x'_\beta}-\frac{\partial^2 J^\beta}{\partial x'_\gamma\partial x'_\alpha}\right)d^4x'$$

Con el teorema de Gauss, transformamos el segundo término de (42). Por el teorema de Gauss, la integral del espacio-tiempo cuatridimensional se transforma en la integral de una superficie tridimensional. Los términos de esta integral que se encuentran entre paréntesis ($\overline{A}$) representan cargas y corrientes finitas. Al integrar $\overline{A}$ sobre $d\overline{S}$ es como si extendiéramos estas cargas y corrientes finitas sobre una superficie infinita, razón por la cual esta integral del segundo término de (42) resulta ser cero:

$$(43)\ \int\frac{\partial}{\partial x'_\gamma}\{D\left(\frac{\partial J^\alpha}{\partial x'_\beta}-\frac{\partial J^\beta}{\partial x'_\alpha}\right)\}d^4x' = \int D\left(\frac{\partial J^\alpha}{\partial x'_\beta}-\frac{\partial J^\beta}{\partial x'_\alpha}\right)dS^\gamma = 0$$

Por lo tanto, combinando (42) y (43), obtenemos:

$$(44)\ \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = \mu_0\int D\left(\frac{\partial^2 J^\alpha}{\partial x'_\gamma\partial x'_\beta}-\frac{\partial^2 J^\beta}{\partial x'_\gamma\partial x'_\alpha}\right)d^4x' \ \Rightarrow$$

$$(45)\ \frac{\partial F^{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = \mu_0\int D\left(\frac{\partial^2 J^\gamma}{\partial x'_\beta\partial x'_\alpha}-\frac{\partial^2 J^\alpha}{\partial x'_\beta\partial x'_\gamma}\right)d^4x' \ \Rightarrow$$

$$(46)\ \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} = \mu_0\int D\left(\frac{\partial^2 J^\beta}{\partial x'_\alpha\partial x'_\gamma}-\frac{\partial^2 J^\gamma}{\partial x'_\alpha\partial x'_\beta}\right)d^4x'$$

Ahora bien, el primer término del lado derecho de (44) y el segundo término del lado derecho de (45) se anulan, asimismo el segundo término del lado derecho de (44) y el primer término del lado derecho de (46), y el primer término del lado derecho de (45) y el segundo término del lado derecho de (46), de modo que:

$$(47)\ \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_{\gamma}}+\frac{\partial F^{\gamma\alpha}}{\partial x_{\beta}}+\frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}}=0$$

Recordemos la segunda ecuación tensorial de Maxwell:

$$(7)\ \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\frac{\partial F^{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}}=0$$

Comparando (7) y (47) constatamos que la segunda ecuación tensorial de Maxwell, al igual que la primera, se deriva de la conservación de la carga siempre y cuando el tensor $F^{\alpha\beta}$ en (47) se identifique como:

$$(1)\ F^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 \ldots\ldots\ldots B_3 \ldots\ldots\ldots -B_2 \ldots\ldots\ldots -E_1/c \\ -B_3 \ldots 0 \ldots\ldots\ldots\ldots B_1 \ldots\ldots\ldots -E_2/c \\ B_2 \ldots\ldots -B_1 \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots -E_3/c \\ E_1/c \ldots E_2/c \ldots\ldots E_3/c \ldots\ldots\ldots 0 \end{pmatrix}$$

El problema es, como ya se dijo arriba, que no podemos adoptar esta identificación, apoyándonos en las ecuaciones de Maxwell, porque caeríamos en un *petitio principii.* Todavía falta derivar este tensor $F^{\alpha\beta}$ independientemente de las ecuaciones de Maxwell. Por ejemplo, si adoptáramos la siguiente identificación (48):

$$(48)\ F^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 \ldots\ldots\ldots E_3 \ldots\ldots\ldots -E_2 \ldots\ldots\ldots -B_1/c \\ -E_3 \ldots 0 \ldots\ldots\ldots\ldots E_1 \ldots\ldots\ldots -B_2/c \\ E_2 \ldots\ldots -E_1 \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots -B_3/c \\ B_1/c \ldots B_2/c \ldots\ldots B_3/c \ldots\ldots\ldots 0 \end{pmatrix}$$

entonces, la ecuación (47) implicaría:

$$(49)\quad \frac{\partial F^{4\beta}}{\partial x^{\beta}}=\frac{\partial B_1/c}{\partial x^1}+\frac{\partial B_2/c}{\partial x^2}+\frac{\partial B_3/c}{\partial x^3}+0=\mu_0 c\rho \Rightarrow \nabla\bullet B=\mu_0 c^2\rho=\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

la cual no tiene base experimental y no es una de las ecuaciones de Maxwell. Comenta Heras: "*la ecuación de continuidad puede también implicar otras teorías electromagnéticas diferentes de la de Maxwell.*"[1717] Una consideración adicional es entonces necesaria, para ir más allá de la compatibilidad matemática, y justificar la elección de las componentes con base en argumentos de la física.

III.2. LAS DOS ECUACIONES TENSORIALES SE DERIVAN DE LA ECUACIÓN TENSORIAL DE LA CONSERVACION DE LA CARGA.

Podemos proceder en general etiquetando las componentes del tensor $F^{\alpha\beta}$ en (47) como sigue:

$$(50)\; F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & F^{12} & F^{13} & F^{14} \\ F^{21} & 0 & F^{23} & F^{24} \\ F^{31} & F^{32} & 0 & F^{34} \\ F^{41} & F^{42} & F^{43} & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que queremos comprobar es la siguiente identidad.

$$(51)\quad \begin{pmatrix} 0 & F^{12} & F^{13} & F^{14} \\ F^{21} & 0 & F^{23} & F^{24} \\ F^{31} & F^{32} & 0 & F^{34} \\ F^{41} & F^{42} & F^{43} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -E_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -E_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -E_3/c \\ E_1/c & E_2/c & E_3/c & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a considerar *el límite independiente del tiempo* de las ecuaciones (37) y (47) en conjunción con las leyes de Coulomb y Biot-Savart, para justificar esta identificación. Recordemos una vez más:

$$(37)\qquad F^{\alpha\beta} = \mu_0 \int D\left(\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} - \frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}}\right) d^4x'$$

De la (37), obtenemos:

$$(52)\; F^{44} = \mu_0 \int D\left(-\frac{\partial J^4}{c\partial t'} + \frac{\partial J^4}{c\partial t'}\right) d^4x' = 0 \qquad \text{y}$$

[1717] José Heras, "How to obtain the covariant form of Maxwell's equations from the continuity equation", en: *European Journal of Physics,* vol. 30 (2009): 851

(53) $F^{4j} = \mu_0 \int D\left(\frac{\partial J^4}{\partial x'_j} - \frac{\partial J^j}{\partial x'_4}\right) d^4x'$

Recordemos la regla (i) arriba formulada:

(54)= (h) $D(x,x') = \frac{\delta(t'-t+R/c)}{4\pi R}$

De (53) y (54) obtenemos:

(55) $F^{4j} = \int \delta(t'-t+R/c)[\int \frac{\mu_0}{4\pi R}\left(\frac{\partial J^4}{\partial x'_j} - \frac{\partial J^j}{\partial x'_4}\right) d^3x']dt'$

Dado que, si $t'-t+R/c=0$, se sigue que la ecuación (55) se transforma en:

(56) $F^{4j} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{R}\left(\frac{c\partial\rho}{\partial x'_j} - \frac{\partial J^j}{c\partial t'}\right) d^3x'$

en donde $\rho \equiv \rho(x',t') \equiv \rho(x',t' \equiv t - \frac{R}{c})$ y $J^j \equiv J^j(x',t') \equiv J^j(x',t' \equiv t - \frac{R}{c})$, es decir, la densidad de carga está evaluada en el punto fuente (x',ct'), donde está la causa. La (56) se transforma en:

(57) $F^{4j} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \left(\frac{c\partial\rho}{R\partial x'_j} - \frac{\partial J^j}{Rc^2\partial t'}\right) d^3x'$

En el *límite independiente del tiempo* $\rho \equiv \rho(x')$ y entonces

(58) $\int\left(\frac{\partial J^j}{Rc^2\partial t'}\right) d^3x' = 0$, de modo que la (57) se reduce a:

(59) $F^{4j} = \frac{\mu_0 c}{4\pi}\int \left(\frac{\partial\rho}{R\partial x'_j}\right) d^3x'$

Consideramos que:

(60) $\frac{\partial}{\partial x'_j}\frac{\rho}{R} = \frac{1}{R}\frac{\partial\rho}{\partial x'_j} + \rho\frac{\partial R^{-1}}{\partial x'_j} \Rightarrow \frac{1}{R}\frac{\partial\rho}{\partial x'_j} = \frac{\partial}{\partial x'_j}\frac{\rho}{R} - \rho\frac{\partial R^{-1}}{\partial x'_j}$

Ahora bien[1718]:

(61) $$\frac{\partial R^{-1}}{\partial x'_j} = -R^{-2}\frac{\partial R}{\partial x'_j} = -R^{-2}\left(-\hat{R}^j\right) = \frac{\hat{R}^j}{R^2}$$

Combinando (60) y (61) obtenemos:

(62) $$\frac{1}{R}\frac{\partial \rho}{\partial x'_j} = \frac{\partial}{\partial x'_j}\frac{\rho}{R} + \rho\frac{\hat{R}^j}{R^2}$$

Sustituimos (62) en (59):

(63) $$F^{4j} = \frac{\mu_0 c}{4\pi}\int\left(\frac{\partial}{\partial x'_j}\frac{\rho}{R} + \rho\frac{\hat{R}^j}{R^2}\right)d^3x'$$

Aplicando el teorema de Gauss, se obtiene $\int\left(\frac{\partial}{\partial x'_j}\frac{\rho}{R}\right)d^3x' = \int\frac{\rho}{R}d\overline{S}'$. Al integrar sobre $d\overline{S}$, es como si extendiéramos las cargas finitas sobre una superficie infinita, razón por la cual esta integral de superficie resulta ser cero:

(64) $$\int\left(\frac{\partial}{\partial x'_j}\frac{\rho}{R}\right)d^3x' = \int\frac{\rho}{R}d\overline{S}' \to 0$$

Combinando (63) y (64) obtenemos:

(65) $$F^{4j} = \frac{\mu_0 c}{4\pi}\int\left(\rho\frac{\hat{R}^j}{R^2}\right)d^3x'$$

Dado que $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$, la (65) se transforma en:

(66) $$F^{4j} = \frac{\mu_0 c}{4\pi}\int\left(\frac{\rho}{R^2}\hat{R}^j\right)d^3x' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\int\frac{\rho}{R^2}\hat{R}^j d^3x'$$

Ahora bien, *según Coulomb*, la fuerza electrostática entre dos cargas, q_1 y q:

(67) $$F_{EM} = q_1\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\hat{R}$$

De esta ecuación extraemos el campo electrostático de la carga q:

[1718] NB: en Murray Spiegel, *Análisis vectorial* (1998): 60, ecuación 3b, se obtiene $\nabla\phi = \nabla\frac{1}{R} = \frac{\partial R^{-1}}{\partial x_j} = -\frac{\hat{R}}{R^2}$; la razón de esta diferencia de signo con respecto a (60) es que $R^j = (x^j - x'^j)$ y $\frac{\partial R^{-1}}{\partial x_j} = -\frac{\partial R^{-1}}{\partial x'_j}$

(68) $\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\hat{R}$

Si *generalizamos la (68) a una distribución de partículas dada por* $\rho \equiv \rho(x')$ (e introduciendo la notación tensorial para efectos de comparación) obtenemos:[1719]

(69) $E^j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho}{R^2}\hat{R}^j d^3x'$

Comparando (69) y (66) obtenemos:

(70) $F^{4j} = \frac{E^j}{c}$ Q.E.D.

Con base en (66) hemos derivado *una parte* del tensor del campo electromagnético (ecuación 1) de la ecuación de continuidad y de la ley de Coulomb, independientemente de las ecuaciones de Maxwell:

(71) $F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots F^{12} \ldots\ldots\ldots F^{13} \ldots\ldots\ldots -E^1/c \\ F^{21} \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots\ldots F^{23} \ldots\ldots -E^2/c \\ F^{31} \ldots\ldots\ldots F^{32} \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots -E^3/c \\ E^1/c \ldots\ldots E^2/c \ldots\ldots E^3/c \ldots\ldots 0 \end{pmatrix}$

Ahora falta derivar F^{12}, F^{13} y F^{23}. Ahora bien, $F^{\alpha\beta} \equiv (F^{ij}, F^{i4})$. Como ya tenemos F^{i4} (ver 71), falta solamente F^{ij}. Recordemos también (e), a saber, $\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x'_i}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\right)$. Necesitamos solamente la parte espacial, a saber, a saber, $\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \equiv \left(+\frac{\partial}{\partial x'_i}\right)$, de modo que la (37) se transforma como sigue:

(37) $F^{\alpha\beta} = \mu_0 \int D\left(\frac{\partial J^\alpha}{\partial x'_\beta} - \frac{\partial J^\beta}{\partial x'_\alpha}\right)d^4x' \quad \Rightarrow$

(72) $F^{ij} = \mu_0 \int D\left(\frac{\partial J^i}{\partial x'_j} - \frac{\partial J^j}{\partial x'_i}\right)d^4x'$

Recordemos una vez más la regla h:

[1719] Heras tiene la misma ecuación, pero con símbolos diferentes: $(E)^i = \frac{\alpha}{4\pi}\int d^3x' \frac{(\hat{R})\rho}{R^2}$, en donde $\alpha = 1/\varepsilon_0$; véase José Heras, "How to obtain the covariant form of Maxwell's equations fron the continuity equation", en: *European Journal of Physics,* vol. 30 (2009): 850

(54)= (h) $D(x,x') = \dfrac{\delta(t'-t+R/c)}{4\pi R}$

Sustituimos (54) en (72) para obtener:

(73) $F^{ij} = \mu_0 \int \dfrac{\delta(t'-t+R/c)}{4\pi R}\left(\dfrac{\partial J^i}{\partial x'_j} - \dfrac{\partial J^j}{\partial x'_i}\right) d^4x'$

Dado que, si $t'-t+R/c=0$, se sigue que la ecuación (55) se transforma en:

(74) $F^{ij} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\partial J^i}{\partial x'_j} - \dfrac{\partial J^j}{\partial x_i}\right) d^3x'$

En el límite independiente del tiempo, $J' \equiv (x',t') \to J(x')$, de modo que:

(75) $F^{23} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\partial J^2}{\partial x'_3} - \dfrac{\partial J^3}{\partial x'_2}\right) d^3x'$

(76) $F^{31} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int \dfrac{1}{R}\left(-\dfrac{\partial J^1}{\partial x'_3} + \dfrac{\partial J^3}{\partial x'_1}\right) d^3x'$

(77) $F^{12} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\partial J^1}{\partial x'_2} - \dfrac{\partial J^2}{\partial x'_1}\right) d^3x'$

Ahora bien, el producto rotacional de J es:

(78) $\nabla \times J = (\dfrac{\partial J^3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial J^2}{\partial x_3})\hat{\imath} + (-\dfrac{\partial J^3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial J^1}{\partial x_3})\hat{\jmath} + (\dfrac{\partial J^2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial J^1}{\partial x_2})\hat{k} \Rightarrow$

(79) $\nabla' \times J = (-\dfrac{\partial J^3}{\partial x'_2} + \dfrac{\partial J^2}{\partial x'_3})\hat{\imath} + (+\dfrac{\partial J^3}{\partial x'_1} - \dfrac{\partial J^1}{\partial x'_3})\hat{\jmath} + (-\dfrac{\partial J^2}{\partial x'_1} + \dfrac{\partial J^1}{\partial x'_2})\hat{k} \Rightarrow$

Ahora bien, los integrandos de las ecuaciones (75), (76) y (77) se identifican con las componentes cartesianas $\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}$ del rotacional de J de la ecuación (79):

(80) $F^{ij} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\varepsilon^{ijk}\int \dfrac{1}{R}(\nabla' \times J)_k d^3x'$

donde ε^{ijk} es el símbolo de Levi-Civita, que, partiendo de $\varepsilon^{123}=1$, se define como:

1) $\varepsilon^{ijk}=1$, si hay un número par de permutaciones de dos índices

2) $\varepsilon^{ijk}=-1$, si hay un número impar de permutaciones de dos índices

3) $\varepsilon^{ijk}=0$, en todos los demás casos (por ejemplo cuando el mismo índice se repite)

Consideramos que:

$$(81)\ \nabla' \times \frac{J}{R} = \frac{1}{R}\nabla' \times J - J \times \nabla' \frac{1}{R} \Rightarrow$$

$$\nabla' \times \frac{J}{R} = \frac{1}{R}\nabla' \times J + J \times \nabla \frac{1}{R} \Rightarrow$$

$$\nabla' \times \frac{J}{R} = \frac{1}{R}\nabla' \times J - J \times \frac{\hat{R}}{R^2} \Rightarrow$$

$$(82)\ \frac{1}{R}\nabla' \times J = \nabla' \times \frac{J}{R} + J \times \frac{\hat{R}}{R^2}$$

Sustituimos (82) en (80) para obtener (83):

$$(83)\ F^{ij} = \frac{\mu_0 \varepsilon^{ijk}}{4\pi} \int \left(\nabla' \times \frac{J}{R} + J \times \frac{\hat{R}}{R^2} \right)_k d^3x'$$

Ahora bien, el primer término del lado derecho implica integrar una corriente finita sobre una superficie infinita, resultando en cero:

$$(84) \int \left(\nabla' \times \frac{J}{R} \right)_k d^3x' = \int \left(\frac{J}{R} \times d\overline{A} \right) \to 0 \quad (d\overline{A} = \text{diferencial de superficie})$$

Combinando (83) y (84) obtenemos:

$$(85)\ F^{ij} = \frac{\mu_0 \varepsilon^{ijk}}{4\pi} \int \left(\overline{J} \times \frac{\hat{R}}{R^2} \right)_k d^3x'$$

Recordemos ahora la corriente $J_{partícula} \equiv qv\delta(x - r)$, asociada a una partícula que se mueve con baja velocidad constante v a lo largo de la trayectoria r. Sustituyendo este valor en (85) obtenemos:

$$(86)\ F^{ij} = \frac{\mu_0 \varepsilon^{ijk}}{4\pi} \int \left(\{qv\delta(x - r)\} \times \frac{\hat{R}}{R^2} \right)_k d^3x'$$

Evaluando este integral, obtenemos:

$$(87)\ F^{ij} = \varepsilon^{ijk} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} qv \times \frac{\hat{R}}{R^2} \right)_k$$

Por otra parte, el campo magnético generado por esta corriente ($J_{partícula} \equiv qv\delta(x - r)$), según la ley experimental de Biot-Savart, es: [1720]

[1720] Heras tiene la misma ecuación, pero con símbolos diferentes: $(\overline{B})^i = \frac{\beta}{4\pi} \int d^3x' \left(\overline{J} \times \frac{\hat{R}}{R^2} \right)$, en donde $\beta = \mu_0$ y $\overline{J} = q\overline{v}$ véase José Heras, “How to obtain the covariant form of Maxwell’s equations fron the continuity equation”, en: *European Journal of Physics,* vol. 30 (2009): 851

(88) $\overline{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} q\overline{v} \times \dfrac{\hat{R}}{R^2}$ (ley de Biot-Savart para una partícula, Serrano (2001):326)

De la comparación de (87) y (88), concluimos, que:

(89) $F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k$

Verificamos las tres siguientes componentes, que se reconocen en la matriz (1):

(90) $F^{12} = \varepsilon^{123} B_3 = B_3$

(91) $F^{31} = \varepsilon^{312} B_2 = B_2$

(92) $F^{23} = \varepsilon^{231} B_1 = B_1$

Con (70) y (89) comprobamos la identidad de las dos matrices que se postuló en la (71). Hemos encontrado *la forma del tensor del campo electro-magnético, a partir de la ecuación de continuidad y de las ecuaciones de Coulomb y de Biot-Savart, independientemente de las ecuaciones de Maxwell.* Hemos corroborado la hipótesis de que la $F^{\alpha\beta}$ en la ecuación (38) es idéntica a la $F^{\alpha\beta}$ de la (6), Q.E.D. Con otras palabras, hemos derivado las ecuaciones no-homogéneas de Maxwell de la ecuación de continuidad.

(6) $\dfrac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \mu_0 J^{\alpha}$ (ecuaciones inhomogéneas)

(38) $\dfrac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \mu_0 J^{\alpha}$

Ahora bien, con la corroboración de la hipótesis sobre $F^{\alpha\beta}$ expresada en la (1), podemos demostrar directamente las ecuaciones homogéneas de Maxwell, que ya habíamos logrado, componente por componente, en la sección que va de la ecuación (17) a la (25), a saber:

(7) $\dfrac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \dfrac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \dfrac{\partial F^{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0$

De esta manera hemos demostrado que, efectivamente, las cuatro ecuaciones vectoriales de Maxwell o su representación tensorial en dos ecuaciones tensoriales, a saber, la (6) y la (7), se derivan de tres leyes axiomáticas que lógicamente son anteriores a las de Maxwell, a saber, la ecuación de la conservación de la carga (la ley de Kirchhoff); la ley de Coulomb; y la ley de Biot-Savart.

La ley de Coulomb y la ley de Biot-Savart son casos particulares de la ley de la fuerza de Lorentz. El hecho de que la ley de la fuerza de Lorentz ha sido corroborada experimentalmente, desde un principio, no quita que, teóricamente, es una ley axiomática, es decir, una ley que no se deduce de ninguna otra ley, lógicamente anterior a la de Lorentz.

Veremos a continuación cómo *se derivan la ley de Coulomb y la ley de Biot-Savart de la ley de la fuerza de Lorentz*, a saber, la siguiente:[1721]

(17) $\overline{F}_{EM} = q(\overline{E} + \overline{v} \times \overline{B})$

En el caso de la electrostática, como no hay cargas que se mueven, $\overline{v} \times \overline{B} = 0$, no hay campo magnético generado por estas cargas, y la ecuación se reduce a

(93) $\overline{F}_E = q\overline{E}$ (ley de Coulomb)

Recordemos:

(68) $\overline{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q}{R^2} \hat{R}$

(69) $E^j = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int \dfrac{\rho}{R^2} \hat{R}^j d^3 x'$

Combinando (93) con (68) y (69), respectivamente, obtenemos:

(94) $\overline{F}_E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{qQ}{R^2} \hat{R}$ (ley de Coulomb para una partícula)

(95) $F^j = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int \dfrac{\rho}{R^2} \hat{R}^j d^3 x'$ (ley de Coulomb generalizada)

Ahora veremos el caso contrario, que la partícula se mueve con respecto al punto donde se mide el campo magnético, de modo que no hay campo electrostático y sí hay campo magnético:

(96) $\overline{F}_M = q(\overline{v} \times \overline{B})$

Recordemos ahora:

(88) $\overline{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} Q\overline{\varpi} \times \dfrac{\hat{R}}{R^2}$ (ley de Biot-Savart para una partícula)

(85) $\varepsilon^{ijk} B_k = \dfrac{\mu_0 \varepsilon^{ijk}}{4\pi} \displaystyle\int \left(J \times \dfrac{\hat{R}}{R^2} \right)_k d^3 x'$ (ley de Biot-Savart generalizada)

Sustituyendo (88) en (96), obtenemos:

(97) $\overline{F}_M = \dfrac{\mu_0}{4\pi R^2} Qq[\overline{v} \times (\overline{\varpi} \times \hat{R})]$ (ley de Biot-Savart para una partícula),

en donde ω es la velocidad de la partícula Q que genera el campo magnético, y v es la velocidad de la partícula q sobre la cual actúa el campo.

[1721] Esta parte no viene explícitamente en los artículos de Heras

Ahora sustituimos (85) en (96) y obtenemos (98):

(96) $\bar{F}_M = q(\bar{v} \times \bar{B}) \Rightarrow F_M{}^i = q\varepsilon^{ijk}(v_j B_k)$

(85) $\varepsilon^{ijk} B_k = \dfrac{\mu_0 \varepsilon^{ijk}}{4\pi} \displaystyle\int \left(\bar{J} \times \frac{\hat{R}}{R^2} \right)_k d^3x'$

(98) $F_M{}^i = \dfrac{\mu_0 \varepsilon^{ijk} q}{4\pi} (v_j \displaystyle\int \left(\bar{J} \times \frac{\hat{R}}{R^2} \right)_k d^3x')$ (ley de Biot-Savart generalizada)

Es importante señalar que de (70) y (63) se obtiene la solución para el campo eléctrico $\bar{E}$ en las ecuaciones I, II y IV de Maxwell. Recordemos:

(70) $F^{4j} = \dfrac{E^j}{c}$ Q.E.D.

(63) $F^{4j} = \dfrac{\mu_0 c}{4\pi} \displaystyle\int \left(\frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{\rho}{R} + \rho \frac{\hat{R}^j}{R^2} \right) d^3x'$

De estas dos ecuaciones obtenemos:

(99) $E^j = \dfrac{\mu_0 c^2}{4\pi} \displaystyle\int \left(\frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{\rho}{R} + \rho \frac{\hat{R}^j}{R^2} \right) d^3x' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left(\frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{\rho}{R} + \rho \frac{\hat{R}^j}{R^2} \right) d^3x' \Rightarrow$

(100) $\bar{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int \frac{\left[-\nabla' \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{J}}{\partial t'} \right]_{ret}}{R} d^3x'$

Análogamente, de (89) y (74) resolvemos el campo magnético B de las ecuaciones II, III y IV de Maxwell. Recordemos:

(89) $F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k$

(74) $F^{ij} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int \frac{1}{R} \left(\frac{\partial J^i}{\partial x'_j} - \frac{\partial J^j}{\partial x_i} \right) d^3x'$

De estas dos ecuaciones obtenemos:

(101) $\varepsilon^{ijk} B_k = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int \frac{1}{R} \left(\frac{\partial J^i}{\partial x'_j} - \frac{\partial J^j}{\partial x_i} \right) d^3x' \Rightarrow \quad B^i = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon^{ijk} \int \frac{\partial J_k}{\partial x^j} d^3x' \Rightarrow$

(102) $\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\nabla' \times \bar{J}]_{ret}}{R}d^3x'$

Los “corchetes cuadrados $[\ ]_{ret}$ significan que el tiempo t' debe ser evaluado en el tiempo retardado, $t' = t - |\bar{x} - \bar{x}'|/c$”[1722]

Conclusión: las ecuaciones (100) y (102) son las soluciones retardadas de las ecuaciones de Maxwell, que nos liberan del hecho inconveniente de que la expresión tradicional de las ecuaciones de Maxwell (I, II, II y IV) no toman en cuenta explícitamente el principio de la causalidad. Es importante remarcar que estas dos soluciones vectoriales pueden escribirse como una sola ecuación tensorial, a saber, la (37):

(37) $F^{\alpha\beta} = \mu_0\int D\left(\frac{\partial J^\alpha}{\partial x'_\beta} - \frac{\partial J^\beta}{\partial x'_\alpha}\right)d^4x'$

IV. LAS ECUACIONES DE ONDA EN FORMA VECTORIAL Y TENSORIAL

De las cuatro ecuaciones de Maxwell se pueden deducir las dos ecuaciones de onda de los campos eléctrico y magnético, como a continuación se comprueba. Una onda es un mecanismo para el transporte de energía y *momentum*. En general, una onda es periódica, es decir, se repite en el espacio (la longitud de onda) y en el tiempo (el período). Las ondas que necesitan un medio para transportarse son ondas mecánicas.[1723] Las funciones periódicas más sencillas son las de seno y coseno, a saber $y = sen(x)$ y $y' = \cos x = sen(x + \frac{1}{2}\pi)$, que, como vemos, solamente difieren en una constante de fase o de ángulo, a saber, $\frac{1}{2}\pi = 90^0$. Las funciones de onda tienen una longitud λ, a saber la variación en el espacio, que, en el sistema, MKS se mide en metros y un período T que se mide en segundos (en el caso de las funciones de seno y coseno $T = 2\pi$). Una onda tiene también una velocidad v (en metros por segundo) y una frecuencia f (el número de períodos por segundo). Estas propiedades se relacionan entre sí, por cuatro ecuaciones de definición.[1724]

A partir de la función senoidal, podemos derivar una ***función de onda más general***[1725]. La función de onda que se mueve *a la derecha* con velocidad $v = \lambda * f$ es la siguiente:

[1722]John Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (1998): 246. Nota Bene: $|\bar{x} - \bar{x}'| = R$

[1723] Las que no lo necesitan, son no-mecánicas. El carácter de ‘onda’ de las ecuaciones de campo no-mecánicas, no representa un rasgo físico del campo o de la partícula, sino que representa la probabilidad de cierta conducta del campo o de la partícula, en el contexto de cierta situación externa, natural o experimental.

[1724] a) $T = \frac{1}{f}$; b) $\lambda = v * T = \frac{v}{f}$; c) $v = \lambda * f$ y d) $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$.

[1725] Podemos construir *una función escalar de onda más general*, a partir del caso simple de la ecuación senoidal.

(VIIA) $y(x,t) = Asen\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - (2\pi f)t\right)$

y la que se mueve con la misma velocidad *a la izquierda*:

(VIIB) $y(x,t) = Asen\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + (2\pi f)t\right)$

A continuación derivamos primero las ecuaciones de onda de los campos eléctrico y magnético de las cuatro ecuaciones de Maxwell, y en seguida comprobaremos que estas ecuaciones de onda de los campos eléctrico y magnético satisfacen la ecuación de onda (VII). Recordemos primero tres de las cuatro ecuaciones de Maxwell:

I_{ED}. $\nabla \bullet \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; II_{ED}. $\nabla \times \overline{E} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0$ y IV_{ED}. $\nabla \times \overline{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \mu_0 J$

Si tomamos en cuenta algunas propiedades del álgebra vectorial, a saber, que $\nabla \times (\nabla \times \overline{A}) = \nabla(\nabla \bullet \overline{A}) - \nabla^2 \overline{A}$ y que $\nabla \times \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} = \frac{\partial(\nabla \times \overline{A})}{\partial t}$, la ecuación II_{ED} se queda así:

$$(103)\nabla \times (\nabla \times \overline{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla(\nabla \bullet \overline{E}) - \nabla^2 \overline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \overline{B})$$

Sustituimos en (103) las ecuaciones I_{ED} y IV_{ED} para obtener la (104):

---

1) Primer paso: (1) amplitud $y = senx$, con período $T = 2\pi$
2) Segundo paso: hacemos más general la amplitud, multiplicando la ecuación (1) con una constante A: (2) $y = Asenx$
3) Ahora generalizamos el período, multiplicando la fase con un factor constante γ, de modo que (3) $y = Asen(\gamma x)$. Ahora, el período ya no es 2π, sino $2\pi / \gamma$, como comprobaremos a continuación: $$sen[\gamma(x + \frac{2\pi}{\gamma})] = sen(\gamma x + 2\pi) = sen\gamma x * \cos 2\pi + \cos\gamma x * sen2\pi = sen\gamma x + 0 = sen\gamma x$$
4) Ahora bien, si la onda tiene una longitud λ, se sigue que $\gamma = \frac{2\pi}{\lambda}$, para que la ecuación (3) se quede como sigue: (4) $y = Asen\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$, pues $y = Asen\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = Asen\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x+\lambda)\right)$
5) Si la onda se mueve hacia la derecha con velocidad v, la ecuación se transforma de la siguiente manera: $$y = Asen\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right) = Asen\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi v}{\lambda}t\right) \Rightarrow (5)\ y = Asen\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - (2\pi f)t\right) \Rightarrow$$ $y = Asen(k * x - \omega * t)$ en donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ se llama el '**número de onda'**, y $\omega = 2\pi f$ es la '**frecuencia angular'**.
6) Esta ecuación de onda es, si la onda se mueve a la derecha, (6A) $y = Asen(kx - \omega t)$ ó, si la onda se mueve a la izquierda: (6B) $y = Asen(kx + \omega t)$.

(104) $\nabla(\frac{\rho}{\varepsilon_0}) - \nabla^2\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\overline{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}) \Rightarrow$

(105) $\nabla^2\overline{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\frac{\partial\overline{J}}{\partial t}$ ***(ecuación de onda del campo eléctrico con fuentes)***

La solución retardada de esta ecuación de onda, con las fuentes evaluadas en tiempo retardado, congruente con el principio de la causalidad, la hemos encontrado arriba, a saber:

(100) $\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\left[-\nabla'\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\overline{J}}{\partial t'}\right]_{ret}}{R}d^3x'$

En particular, ***cuando las fuentes*** ρ ***y*** $\overline{J}$ ***sean cero***, la ecuación (105) se reduce a:

(106) $\nabla^2\overline{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2} = \overline{0}$ ***(ecuación de onda del campo eléctrico sin fuentes)***

A continuación derivamos la ecuación del campo magnético. Recordemos:

II_{ED}. $\nabla\times\overline{E} + \frac{\partial\overline{B}}{\partial t} = 0$; III_{ED}. $\nabla\bullet\overline{B} = 0$ y IV_{ED}. $\nabla\times\overline{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t} = \mu_0\overline{J}$

Tomando en cuenta las mismas propiedades del álgebra vectorial, la IV_{ED} se transforma como sigue:

(107) $\nabla\times(\nabla\times\overline{B}) - \nabla\times\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}\} = \nabla\times(\mu_0\overline{J}) \quad \Rightarrow \nabla(\nabla\bullet\overline{B}) - \nabla^2\overline{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\overline{E}) + \mu_0\nabla\times\overline{J}$

Sustituimos en la ecuación (107) las ecuaciones II_{ED} y $\text{III}_{\text{ED,}}$ y obtenemos la (108):

(108) $\nabla^2\overline{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\nabla\times\overline{J}$ ***(ecuación de onda del campo magnético con fuentes)***

Una vez más, la solución retardada de esta ecuación de onda, con las fuentes evaluadas en tiempo retardado (el tiempo de la causa y, por lo tanto, congruente con el principio de la causalidad), la hemos encontrado arriba, a saber:

(87) $\overline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\left[\nabla'\times\overline{J}\right]_{ret}}{R}d^3x'$

En particular, **cuando las fuentes** ρ **y** J **sean cero,** la ecuación (108) se reduce a:

(109) $\nabla^2\overline{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{B}}{\partial t^2} = \overline{0}$ ***(ecuación de onda del campo magnético sin fuentes)***

Si sustituimos en las ecuaciones (106) o (109), la ecuación de onda (VII), obtenemos[1726] $v = \lambda * \nu \equiv \lambda * f$, lo que es cierto por definición (véase arriba), lo que demuestra que las

---

[1726] Para probar esto, ofrecemos primero la ecuación de onda escalar de la nota (10) en forma vectorial: $y(\bar{r},t) = \bar{A}sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)$. La corroboración va en seis pasos:

1) La ecuación de onda vectorial es $\nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \bar{0} \Rightarrow (\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\bar{E} = \bar{0}$.

2) La solución de esta ecuación debe ser $\bar{E} = \bar{A}sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)$, en donde

$\bar{E} = E_x(\bar{r},t) + E_y(\bar{r},t) + E_z(\bar{r},t)$;

$\bar{k} = k_x\hat{\imath} + k_y\hat{\jmath} + k_z\hat{k}$; $k = |\bar{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\bar{v} = \bar{\lambda} * f$; $\bar{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$; y $\omega = 2\pi f$. Verifiquémoslo.

3) a) $\frac{\partial \bar{E}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial}[\bar{A}sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)] = \bar{A}\cos(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t) * \frac{\partial}{\partial x}(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t) \Rightarrow$

$\frac{\partial \bar{E}}{\partial x} = \bar{A}[\cos(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)](\bar{k} \bullet \hat{\imath})$

b) $\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} = -\bar{A}[sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)](\bar{k} \bullet \hat{\imath})^2 = -\bar{A}[sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)]k_x^{\ 2}$;

c) Análogamente, $\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial y^2} = -\bar{A}[sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)]k_y^{\ 2}$;

d) y $\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} = -\bar{A}[sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)]k_z^{\ 2}$;

e) sumando (a), (b) y (c), obtenemos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\bar{E} = -\bar{A}[sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)](k_x^{\ 2} + k_y^{\ 2} + k_z^{\ 2}) \Rightarrow \nabla^2 \bar{E} = -\bar{A}[sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)]k^2.$$

4) Análogamente, $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \bar{A}[\cos(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)](-\omega) \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\bar{A}[sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)](\omega^2)$

5) Combinando (3e) y (4), obtenemos: (5) $\nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = (-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\bar{A}sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t) = \bar{0} \Rightarrow$ A y/ó B:

6) A) $(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) = 0 \Rightarrow$ (6) $c = \sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}} = \pm\left|\frac{\omega}{k}\right| = \frac{2\pi f}{2\pi / \lambda} = \lambda f$; ó

B) $sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t) = \bar{0} \Rightarrow \bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t = \bar{0}$; si la velocidad v, en la dirección de una de las tres coordenadas,

es $c = \frac{r_x}{t} \Rightarrow r_x = ct$; y, por definición, $f = \frac{c}{\lambda}$; por lo tanto, $kr_x - \omega t = 0 \Rightarrow kr_x = \omega t \Rightarrow$

$kct = 2\pi ft \Rightarrow kc = 2\pi f = 2\pi\frac{c}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Dado que tanto A ($c = \lambda f$) como B ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$) son ciertas por definición (ver nota 9, punto b y nota 10, punto 5), se sigue que las ecuaciones de onda de los campos eléctrico y magnético cumplen $\bar{E} = \bar{A}sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)$ y también $\bar{B} = \bar{A}sen(\bar{k} \bullet \bar{r} - \omega t)$, Q.E.D.

ecuaciones (106) y (109) satisfacen la ecuación de onda (VII) y, por lo tanto, son ecuaciones de onda.

En estas ecuaciones de onda los campos eléctrico $\overline{E}$ y magnético $\overline{B}$ se desacoplan y $\overline{E}$ depende de $\overline{J}$ y ρ y $\overline{B}$ depende solamente de $\overline{J}$. **Del punto de vista estrictamente matemático, estas ecuaciones permiten otras soluciones que no sean las retardadas, a saber, las soluciones 'adelantadas' o 'avanzadas', que implican** $t' = t + |\overline{x} - \overline{x}'|/c$**. Pero, del punto de vista de la física, estas soluciones adelantadas se rechazan, porque violan el principio metafísica de la causalidad, a saber, se rechaza la noción de que el efecto precede en el tiempo a la causa.**

Recordemos ***la forma tensorial de las ecuaciones de Maxwell***

(6) las no-homogéneas: $\dfrac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \mu_0 J^{\alpha} \Rightarrow \dfrac{\partial F^{\beta\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \mu_0 J^{\beta}$

(7) las homogéneas: $\dfrac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \dfrac{\partial F_{\alpha}{}^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \dfrac{\partial F^{\gamma}{}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0$

Derivando la (7) con respecto a x_{α}, obtenemos:

$$(110)\quad \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F_{\alpha}{}^{\beta}}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial F^{\gamma}{}_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\beta}} = 0$$

$$(111)\quad \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\alpha}} = -\frac{\partial F_{\alpha}{}^{\beta}}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial F^{\gamma}{}_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\beta}} = +\frac{\partial F^{\beta}{}_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial F^{\gamma}{}_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\beta}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\frac{\partial F^{\beta}{}_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial F^{\gamma}{}_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}\right) = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\frac{\partial F^{\beta\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial F^{\gamma\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$

Sustituyendo (6) en (111), obtenemos, en forma tensorial, ***la ecuación de onda del campo electromagnético en presencia de fuentes:***

$$(112)\quad \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\alpha}} = \mu_0\left[\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} J^{\beta} - \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} J^{\gamma}\right]$$

Cabe remarcar e hecho de que la solución tensorial retardada de esta ecuación (112) es la ecuación (37):

$$(37)\qquad F^{\alpha\beta} = \mu_0 \int D\left(\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} - \frac{\partial J^{\beta}}{\partial x'_{\alpha}}\right) d^4x'$$

La ecuación de onda tensorial (112) integra las ecuaciones de onda vectoriales (105) y (108), como veremos a continuación. Desarrollando el operador de D'Alambert en el lado izquierdo de la ecuación (112), obtenemos las ecuaciones de onda vectoriales para los campos eléctrico y magnético:

$$(113)\ \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 F^{\beta\gamma}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^{\beta\gamma}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F^{\beta\gamma}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F^{\beta\gamma}}{c^2 \partial t^2} = \mu_0 [\frac{\partial}{\partial x^\gamma} J^\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta} J^\gamma]$$

Pongamos $\beta = 4$ y $\gamma = j (j = 1,2,3)$ y recordemos ($J^\beta \equiv (J^i, c\rho$) y (70) $F^{4j} = \frac{E^j}{c}$

$$(114)\ \frac{\partial^2 E^j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E^j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E^j}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E^j}{c^2 \partial t^2} = c\mu_0 \frac{\partial}{\partial x^j} J^4 - c\mu_0 \frac{\partial}{\partial x^4} J^j$$

$$(115)\ \frac{\partial^2 E^j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E^j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E^j}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E^j}{c^2 \partial t^2} = c^2 \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial x^j} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} J^j = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial x^j} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} J^j$$

En la última ecuación reconocemos la ecuación diferencial (105):

$$(105)\ \nabla^2 \overline{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t} = \nabla \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \overline{J}}{\partial t}$$ ***(ecuación de onda del campo eléctrico con fuente)***

Volvamos a la ecuación (113)

$$(113)\ \frac{\partial^2 F^{\beta\gamma}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^{\beta\gamma}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F^{\beta\gamma}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F^{\beta\gamma}}{c^2 \partial t^2} = \mu_0 [\frac{\partial}{\partial x^\gamma} J^\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta} J^\gamma]$$

Ahora sustituimos $\beta = i$ y $\gamma = j$

$$(116)\ \frac{\partial^2 F^{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F^{ij}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F^{ij}}{c^2 \partial t^2} = \mu_0 [\frac{\partial}{\partial x^j} J^i - \frac{\partial}{\partial x^i} J^j]$$

Procedemos a calcular las componentes independientes de la ecuación anterior:

$$(117)\ \frac{\partial^2 F^{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^{23}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F^{23}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F^{23}}{c^2 \partial t^2} = \mu_0 [\frac{\partial}{\partial x^3} J^2 - \frac{\partial}{\partial x^2} J^3] \text{(B1)}$$

$$(118)\ \frac{\partial^2 F^{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^{31}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F^{31}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F^{31}}{c^2 \partial t^2} = \mu_0 [\frac{\partial}{\partial x^1} J^3 - \frac{\partial}{\partial x^3} J^1] \text{(B2)}$$

$$(119)\ \frac{\partial^2 F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F^{12}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F^{12}}{c^2 \partial t^2} = \mu_0 [\frac{\partial}{\partial x^2} J^1 - \frac{\partial}{\partial x^1} J^2] \text{(B3)}$$

Recordemos de la (1) que $F^{23} = B_x, F^{31} = B_y$ y $F^{12} = B_z$

$$(120)\ \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B_x}{c^2 \partial t^2} = -\mu_0 [-\frac{\partial}{\partial x^3} J^2 + \frac{\partial}{\partial x^2} J^3] \text{(B1)}$$

$$(121)\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B_y}{c^2 \partial t^2} = -\mu_0 [-\frac{\partial}{\partial x^1} J^3 + \frac{\partial}{\partial x^3} J^1] \text{(B2)}$$

$$(122)\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B_z}{c^2 \partial t^2} = -\mu_0 [-\frac{\partial}{\partial x^2} J^1 + \frac{\partial}{\partial x^1} J^2] \text{(B3)}$$

Estas últimas tres ecuaciones son las componentes de la ecuación diferencial (108):

(108) $\nabla^2 \overline{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \times \overline{J}$ ***(ecuación de onda para el campo magnético con fuente)***

En particular, si $J^\beta = 0 \,\&\, J^\gamma = 0$, la ecuación de onda tensorial se reduce a la ecuación sin fuentes:

(112) $\frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha} = \mu_0 [\frac{\partial}{\partial x^\gamma} J^\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta} J^\gamma] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha} = 0$

que representa las dos ecuaciones vectoriales de onda, sin fuente, que resultan ser simétricas y explícitamente independientes:

(106) $\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$ ***(ecuación de onda para el campo eléctrico sin fuente.***

(109) $\nabla^2 B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$ ***(ecuación de onda para el campo magnético sin fuente)***

Conclusión: hemos derivado las ecuaciones de onda de las ecuaciones de Maxwell, tanto en forma vectorial como tensorial. Pero, ***las ecuaciones de onda contienen más información que las ecuaciones de Maxwell.*** Con otras palabras, ***toda solución de las ecuaciones de Maxwell –que son de primer orden-- es solución de las ecuaciones de onda –que son de segundo orden-, pero no toda solución de las ecuaciones de onda es solución de las ecuaciones de Maxwell.***

En general, las ecuaciones de onda tienen otras propiedades y simetrías adicionales a las de Maxwell. Esta información matemática adicional de las ecuaciones de onda, no representa –por lo que hasta hoy se ha podido corroborar-- una realidad física. Por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell generan ondas electromagnéticas transversales, pero las de onda no determinan el carácter perpendicular de las ondas eléctrica y magnética. Quiero decir, que el hecho de que las ecuaciones de onda permiten matemáticamente ondas electromagnéticas no-transversales, no significa que estas ondas no-transversales realmente existan en la naturaleza. En la práctica resolvemos primero las ecuaciones de onda –que resulta más fácil-- y obtenemos E y B, cuya relación puede, en este caso, ser transversal o no-transversal y luego corroboramos dos cosas, a saber, en primer lugar, que E y B satisfacen las ecuaciones de Maxwell y, en segundo lugar, que las satisfagan solamente si son campos perpendiculares.

V. POTENCIALES ELECTROMAGNÉTICOS

Recuerda:

$\mathrm{I_{ED}}$. $\nabla \bullet \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Ley de Gauss)

$\mathrm{II_{ED}}$. $\nabla \times \overline{E} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0$ (Ley de inducción de Faraday)

$\mathrm{III_{ED}}$. $\nabla \bullet \overline{B} = 0$ (Ley de Gauss en magnetismo)

IV$_{ED}$. $\nabla \times \overline{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \mu_0 \overline{J}$ (Ley de Ampère-Maxwell)

De $\nabla \bullet \overline{B} = 0$ se sigue que

(110) $\overline{B} = \nabla \times \overline{A}$

en donde $A(x, y, z, t)$ es el 'potencial vectorial', porque $\nabla \bullet (\nabla \times \overline{A}) \equiv 0$, de modo que hemos expresado el campo magnético como una función del potencial vectorial electromagnético. Sustituyamos (5) en (2):

(111) $\nabla \times \overline{E} + \frac{\partial(\nabla \times \overline{A})}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \times (\overline{E} + \frac{\partial \overline{A}}{\partial t}) = 0$

Recuerda:

(112) si $\nabla \times ALGO = 0 \Rightarrow ALGO = -\nabla \phi$

en donde φ se llama el 'potencial escalar'.

De (111) y (112) obtenemos:

(113) $\overline{E} + \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \overline{E} = -\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$

en donde hemos expresado el campo eléctrico como una función de los potenciales electromagnéticos escalar y vectorial, usando las ecuaciones homogéneas de Maxwell (la II y la III).

Ahora sustituiremos (113) en (I), y (110) y (113) en (IV). Sustituyendo (113) en (I), obtenemos:

(114) $\nabla \bullet (-\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \nabla\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

Recuerda:

(115) $\nabla \bullet \nabla\varphi = \nabla^2\varphi$

De (114) y (115), obtenemos:

(116) $-\frac{\partial(\nabla \bullet \overline{A})}{\partial t} - \nabla^2\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

(117) $\nabla^2\varphi + \frac{\partial(\nabla \bullet \overline{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Ahora sustituimos (110) y (113) en (IV):

(118). $\nabla \times (\nabla \times \overline{A}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \overline{A}}{\partial t}\right)}{\partial t} = \mu_0 \overline{J}$ (NB $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$)

Recordemos:

(119) $\nabla \times (\nabla \times \overline{A}) = \nabla(\nabla \bullet \overline{A}) - \nabla^2 \overline{A}$

Combinando (118) y (119), obtenemos:

(120) $\nabla(\nabla \bullet \overline{A}) - \nabla^2 \overline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{A}}{\partial t^2} = \mu_0 J \;\Rightarrow$

(121) $\nabla^2 \overline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \bullet \overline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 J$

Ahora hacemos un *exkurs* con el fin de comprobar que los campos son invariantes bajo la transformación de norma que a continuación se define. Ahora demostramos que los campos eléctrico y magnético son invariantes bajo la siguiente transformación de norma:

(122) $\varphi' = \varphi - \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$

(123) $A' = A + \nabla f(x,t)$

Usando *la simetría de norma*, es análogo a la medición de la misma cosa con diferentes instrumentos de medición (p.e. la longitud con pulgadas o metros), y, obviamente, la cosa no cambia.

Sustituimos (122) y (123) en (110) $\overline{B} = \nabla \times \overline{A}$ y (113) $\overline{E} = -\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$, para obtener:

(124) $\overline{E}' = -\frac{\partial \overline{A}'}{\partial t} - \nabla\varphi' = .\frac{\partial}{\partial t}[\overline{A} + \nabla f(x,t)] - \nabla[\varphi - \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)] \Rightarrow$

(125) $\Rightarrow \;\; \overline{E}' = -\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \nabla\varphi + [\nabla \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}\nabla f(x,t)]$

Ahora bien, dado que:

(126) $\frac{\nabla \partial}{\nabla t} \equiv \frac{\partial \nabla}{\partial t}$ y

(113) $\overline{E} = -\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$

Se sigue, comparando (125) y (113) que:

(127) $\overline{E}' = \overline{E}$

Análogamente comprobamos que:

(128) $\overline{B}' = \nabla \times [\overline{A} + \nabla f(x,t)] = \nabla \times \overline{A} + [\nabla \times \nabla f(x,t)]$

Dado que:

(129) $\nabla \times \nabla \phi = 0$ y

(110) $\overline{B} = \nabla \times \overline{A}$,

se sigue que:

(130) $\overline{B}' = \overline{B}$

Ahora volvemos a las ecuaciones (117) y la (121):

(117) $\nabla^2\varphi + \dfrac{\partial(\nabla \bullet \overline{A})}{\partial t} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

(117 Bis) $\nabla^2\varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial(\nabla \bullet \overline{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t})}{\partial t} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

(121) $\nabla^2\overline{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\overline{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \bullet \overline{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \overline{J}$

Es importante señalar que estas ecuaciones son *expresiones de las cuatro ecuaciones de Maxwell como función del potencial vectorial y escalar electromagnético.* Lamentablemente*, no existe solución analítica de estas dos ecuaciones.* Sin embargo, si *suponemos la condición de Lorenz* (no es la misma persona que Lorentz), que se define en la (131), sí existe solución:

(131) $\nabla \bullet \overline{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \Rightarrow$

(132) $\nabla^2\varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

(133) $\nabla^2\overline{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\overline{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overline{J}$

Ahora bien, cualquier ecuación de onda se expresa así:

(134) $\left(\nabla^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right) ALGO = FUENTE$

en donde ALGO es φ ó $\overline{A}$ ó $F^{\mu\nu}$, de modo que la (134) es una ecuación de onda para el potencial vectorial.

Ahora bien, ***las ecuaciones (132) y (133) son ecuaciones de onda, en donde sí hay solución para los respectivos potenciales φ y $\overline{A}$.*** Obviamente, esta transformación de las respectivas ecuaciones depende de la verdad de la condición de Lorenz. Para la corroboración de la validez de la condición de Lorenz, hago referencia a Jackson.[1727]

VI. EL CARÁCTER AXIOMÁTICO DEL ELCTROMAGNETISMO

Dado que la ley de Coulomb y la ley de Biot-Savart son casos particulares de la ley de la fuerza de Lorentz, se sigue que ***las ecuaciones de Maxwell se derivan, en realidad, de dos leyes axiomáticas, a saber, la ecuación de continuidad:*** $\nabla \bullet \overline{J} + \partial\rho / \partial t = 0$ ***y la ley de la fuerza de***

[1727] John Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (1998):242. New York, Wiley

Lorentz: $\overline{F}_{EM} = q(\overline{E} + \overline{v} \times \overline{B})$***. Este resultado revela que la estructura ordenada y oculta de la realidad es axiomática. Todas las múltiples leyes del electromagnetismo, unas 84, se deducen de estas dos leyes.***

A continuación agrupo unas 84 ecuaciones del electromagnetismo que se derivan de estas dos leyes axiomáticas.

Parte I, ELECTROSTÁTICA
(1) $P = I * V$ (potencia equivale corriente multiplicada por potencial; unidad: Watt=W)
(2) $I = Q/s$ (corriente es carga por unidad de tiempo; unidad: Ampère=A)
(3) $V = U_E / Q$ (potencial es energía por carga; unidad Volts=V)
(4) $W = V * Q$ (trabajo es potencial multiplicada por carga; unidad Joules=J)
(5) Ley de Coulomb para dos cargas puntuales en el vacío: $F_{q1q2} = \dfrac{kq_1q_2}{|\overline{r}_2 - \overline{r}_1|^2}$ (unidad: Newton=N)

Parte IIA, CAMPO ELÉCTRICO VECTORIAL
(6) Ley de Coulomb vectorial: $\overline{F}_{q1q2} = \dfrac{kq_1q_2}{|\overline{r}_2 - \overline{r}_1|^2}\dfrac{\overline{r}_2 - \overline{r}_1}{|\overline{r}_2 - \overline{r}_1|} = \dfrac{kq_1q_2}{|\overline{r}_2 - \overline{r}_1|^2}\hat{r}$ (unidad: Newton=N)

(7) Campo eléctrico: $\overline{E}(r) = \dfrac{\overline{F}_E}{q_2} = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{kq_i}{|\overline{r} - \overline{r}_i|^2}\dfrac{\overline{r} - \overline{r}_i}{|\overline{r} - \overline{r}_i|}$ (unidades: N/C)

(8) Campo eléctrico si $n \to \infty$: $\overline{E}(r) = \int(\dfrac{k}{|\overline{r} - \overline{r}'|^2}\dfrac{\overline{r} - \overline{r}'}{|\overline{r} - \overline{r}'|}dq')$ en donde dq' es:

(9) $dq' = \lambda' dl' \Rightarrow$ campo lineal: $\overline{E}(r) = \int(\dfrac{k\lambda'}{|\overline{r} - \overline{r}'|^2}\dfrac{\overline{r} - \overline{r}'}{|\overline{r} - \overline{r}'|}dl')$ (unidades: N/C)

(10) $dq' = \sigma' dA' \Rightarrow$ campo superficial: $\overline{E}(r) = \int(\dfrac{k\sigma'}{|\overline{r} - \overline{r}'|^2}\dfrac{\overline{r} - \overline{r}'}{|\overline{r} - \overline{r}'|}dA')$ (unidades: N/C)

(11) $dq' = \rho' dV' \Rightarrow$ campo tridimensional: $\overline{E}(r) = \int(\dfrac{k\rho'}{|\overline{r} - \overline{r}'|^2}\dfrac{\overline{r} - \overline{r}'}{|\overline{r} - \overline{r}'|}dV')$ (unidades: N/C)

(12) Campo eléctrico por círculo con radio R en plano XY: $\overline{E}(z_0) = 2\pi k\sigma(1 - \dfrac{z_0}{\sqrt{(z_0{}^2 + R^2)}})\hat{k}$

(13) Si $z_0 \to 0 \Rightarrow R \to \infty \Rightarrow$ $\overline{E}(z_0) = 2\pi k\sigma\hat{k}$ (unidades: N/C)
(14) Campo eléctrico de una carga puntual q en esfera con radio R

a) magnitud: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \dfrac{kq}{R^2}$

b) vectorial: $\overline{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{R} = \dfrac{kq}{R^2}\hat{R}$

Parte IIB, FLUJO ELÉCTRICO Y LEY DE GAUSS
(15) Flujo eléctrico: $\Phi_E = \int \overline{E} \bullet d\overline{A}$ (unidades: Vm)

(16) Flujo eléctrico en cilindro con radio R, largo L: $\Phi_E = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda L}{\varepsilon_0}$ (unidades: Vm)

(17) Campo eléctrico en punto P generado por flujo eléctrico en cilindro con radio R, largo L:

a) magnitud: $E = \dfrac{2kq\lambda}{R}$

b) vectorial: $\overline{E} = \dfrac{kq\lambda}{R}\hat{r}$

(18) Flujo eléctrico en plano infinito: $\Phi_E = \dfrac{\sigma A}{\varepsilon_0}$ (unidades: Vm)

(19) Campo eléctrico generado por flujo en plano infinito con densidad de carga $\sigma = dq / dA > 0$:

a) magnitud: $E = 2\pi k\sigma = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

b) vectorial: $\overline{E} = 2\pi k\sigma\hat{k} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$

(20) Flujo eléctrico en superficie cerrada: $\Phi_E = \displaystyle\int_{\sup.cerr.} \overline{E} \bullet d\overline{A} = \dfrac{Q_{neta}}{\varepsilon_0}$ (unidades: Vm)

(21) Campo eléctrico generado por esfera con radio R y densidad de carga $\rho = dq / dV > 0$

a) dentro de la esfera: $E = \dfrac{1}{3}\dfrac{\rho r}{\varepsilon_0}$

b) en la superficie de la esfera: $E = \dfrac{1}{3}\dfrac{\rho R}{\varepsilon_0}$

c) fuera de la esfera: $E = \dfrac{1}{3}\dfrac{\rho R^3}{\varepsilon_0 r^2}$

Parte III, POTENCIAL ELÉCTRICO

(22) Energía eléctrica: $U_E = \dfrac{kq_1q_2}{r} + \dfrac{kq_1q_3}{r} + \dfrac{kq_2q_3}{r} + ...\dfrac{kq_{n-1}q_n}{r}$

(23) Potencial eléctrico: $V(r) = \dfrac{U_E}{q_0} = \dfrac{kq_1}{r} + \dfrac{kq_2}{r} + \dfrac{kq_3}{r} + ...\dfrac{kq_n}{r}$

(24) Campo eléctrico vectorial: $\overline{E} = -\nabla V(r)$ $\left(\nabla f = \dfrac{df}{dr}\hat{r}\right)$

(25) Campo eléctrico de una sola carga q: $\overline{E} = -\nabla\dfrac{kq}{r} = \dfrac{kq}{r^2}\hat{r}$

(26) Voltaje entre dos planos imaginarios paralelos (a distancia l) a un plano infinito con densidad de carga superficial σ: $V(l) = V_B - V_A = -\displaystyle\int_{A-}^{B+} \overline{E} \bullet d\overline{l} = \dfrac{\sigma l}{2\varepsilon_0} = 2\pi k\sigma l = E * l$ (por 19a)

(27) Voltaje en superficie esfera con radio R: $(V(R) = \dfrac{kq}{R}$

Parte IV, CAPACITORES Y DIELÉCTRICOS

(28) Capacitancia: $CAP = \frac{Q}{E*d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ (unidades: C/V)

(29) Capacitancia de capacitores en serie: $\frac{1}{CAP_{serie}} = \frac{1}{CAP_1} + \frac{1}{CAP_2} + \frac{1}{CAP_3} + ...\frac{1}{CAP_n}$

(30) Capacitancia de capacitores paralelos: $CAP_{paral} = CAP_1 + CAP_2 + CAP_3 + ...CAP_n$

(31) Capacitancia de capacitor esférico con placas con radio a y b (a<b): $CAP = \frac{4\pi\varepsilon_0 (a*b)}{(b-a)}$

(32) Densidad de energía eléctrica: $\rho_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ (unidades. J/m^3)

(33) Densidad de cargas eléctricas: $\rho_Q = \frac{dQ}{dV}$ (unidades: C/m^3)

Parte V, APLICACIÓN A CIRCUITOS

(34) Corriente: $I = \int \overline{J} \bullet d\overline{A}$

(35) Densidad de energía eléctrica: $\rho_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ (unidades. J/m^3)

(36) Densidad de cargas eléctricas: $\rho_Q = \frac{dQ}{dV}$ (unidades: C/m^3)

(37) Densidad de corriente: $\overline{J} = \rho_Q * \overline{v}_{corr}$ (unidades: $Cm^{-3} * ms^{-1} = A/m^2$)

(38) Resistencia: $R = \frac{RES*l}{Area}$

(39) Ley de Ohm: V=R*I (voltaje es resistencia multiplicada por corriente; unidades: V)

(40) Campo eléctrico: $\overline{E} = RES * \overline{J}$

(41) Resistividad: $RES = \frac{1}{\sigma}$

(42) De (40) y (41): $\overline{E} = \frac{\overline{J}}{\sigma}$

(43) De (42), Ley de Ohm a nivel microscópico: $\overline{J} = \sigma\overline{E}$

(43) Resistencia en paralelo: $\frac{1}{R_{paral}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ...\frac{1}{R_n}$

(44) Resistencia en serie: $R_{serie} = R_1 + R_2 + R_3 + ...R_n$

(45) Ley de Kirchhoff I: la suma de caídas de potencial (el diferencial de potencial) en un circuito cerrado es cero: $V = V_+ - V_- = 0$

(46)Ley de Kirchhoff II: la suma de la carga entrante y saliente es cero: $Q_{entra} + Q_{sale} = 0$

(47) Ley de Joule: la potencia es producto de corriente y voltaje: $P = I*V$ (unidades: $W = J/s$)

(48) Resistencia multiplicada con capacitancia es tiempo: $R*CAP = t$

Parte VI: CAMPO MAGNETOSTÁTICO GENERADO POR CARGAS EN MOVIMIENTO

(49) Fuerza magnética: $\overline{F}_B = q\overline{v} \times \overline{B}$ (unidad: Tesla=T)

(50) Magnitud fuerza magnética: $F_B = |q| vBsen\theta$

(51) Ley de la fuerza de Lorentz: $\overline{F}_{EB} = q\overline{E} + q\overline{v} \times \overline{B}$

(52) Fuerza magnética sobre alambre con corriente I: $\overline{F}_B = I\int_{alambre}(d\overline{l} \times \overline{B})$

(53) Fuerza magnética en alambre, en un plano, con campo magnético perpendicular sobre el plano: $\overline{F}_B = I * l * B_0\hat{n}$ (en donde $\overline{B} = B_0\hat{k}$)

(54) Ley de Biot-Savart: $\overline{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int(\frac{d\overline{l} \times \overline{r}}{r^3})$

Parte VII: LEY DE AMPÈRE

(55) Ley de Ampère: $\int\overline{B} \bullet d\overline{l} = \mu_0 I$

(56) Campo magnético de alambre con radio R:

a) en la superficie del alambre: $|B| = \frac{\mu_0 I_{neta}}{2\pi R}$

b) fuera del alambre: $|B| = \frac{\mu_0 I_{neta}}{2\pi r}$

c) dentro del alambre: $|B| = \frac{\mu_0 I_{neta} r}{2\pi R^2}$

(57) Campo magnético en centro de un solenoide ideal (muy largo, sin efectos de borde):

$B = \frac{\mu_0 IN}{l} = \mu_0 In$ (en donde N es el número de espiras y l la longitud del solenoide)

Parte VIII: LEY DE FARADAY

(58) Flujo magnético: $\Phi_B = \int\overline{B} \bullet d\overline{A}$ (unidades: $Weber \equiv Tm^2$)

(59) Inductancia: $L = \frac{N\Phi_B}{I}$ (si $N = 1 \Rightarrow L = \frac{\Phi_B}{I}$)

(60) Ley de Faraday: 'Fuerza electromotriz' (fem): $\varepsilon = \frac{-d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\overline{B} \bullet d\overline{A}$

(61) Experimentalmente consta: $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$

(62) Ley de Lenz: la corriente inducida se opone al cambio del campo magnético

(63) Energía magnética almacenada: $U_B = \frac{B^2}{2\mu_0}Vol$

(64) Densidad de energía magnética: $\rho_B = \frac{U_B}{Vol} = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Parte IX: LEYES DE MAXWELL

Las leyes de Maxwell en forma integral:

(65) $\int\overline{E} \bullet d\overline{A} = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_0}$ (Ley de Gauss en electricidad)

(66) $\int\overline{E} \bullet d\overline{l} + \frac{d\Phi_B}{dt} = 0$ (Ley de inducción de Faraday)

(67) $\int\overline{B} \bullet d\overline{A} = 0$ (Ley de Gauss en magnetismo)

(68) $\int\overline{B} \bullet d\overline{l} - \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_B}{dt} = \mu_0\int\overline{J} \bullet d\overline{A}$ (Ley de Ampère-Maxwell, en donde $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$)

Las leyes de Maxwell en forma diferencial:

(69) $\nabla \bullet \overline{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Ley de Gauss en electricidad)

(70) $\nabla \times \overline{E} + \dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0$ (Ley de inducción de Faraday)

(71) $\nabla \bullet \overline{B} = 0$ (Ley de Gauss en magnetismo)

(72) $\nabla \times \overline{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \mu_0 \overline{J}$ (Ley de Ampère-Maxwell)

Las leyes de Maxwell independientes del tiempo (electrostática y magnetostática):

(73) $\nabla \bullet \overline{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

(74) $\nabla \times \overline{E} = 0$

(75) $\nabla \bullet \overline{B} = 0$

(76) $\nabla \times \overline{B} = \mu_0 \overline{J}$

Las leyes de Maxwell sin fuente:

(77) $\nabla \bullet \overline{E} = 0$

(78) $\nabla \times \overline{E} + \dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0$

(79) $\nabla \bullet \overline{B} = 0$

(80) $\nabla \times \overline{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} = 0$

Parte X: ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

(81) $\nabla^2 \overline{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho + \mu_0 \dfrac{\partial \overline{J}}{\partial t}$ (ecuación de onda del campo eléctrico, con fuente)

(82) $\nabla^2 \overline{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \overline{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \times \overline{J}$ (ecuación de onda del campo magnético, con fuente)

(83) $\nabla^2 \overline{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} = \overline{0}$ (ecuación de onda del campo eléctrico, sin fuente)

(84) $\nabla^2 \overline{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \overline{B}}{\partial t^2} = \overline{0}$ (ecuación de onda del campo magnético, sin fuente)