APÉNDICE V. LA RELATIVIDAD ESPECIAL DE EINSTEIN Y ALGUNAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

por Juan Auping, con la asesoría de Alfredo Sandoval Villalbazo

En este apéndice tenemos las siguientes secciones:

1.- Las transformaciones de Galileo
2.- Las transformaciones de Lorentz
3.- La dilatación del tiempo
4.- La transformación de Lorentz del momento (en inglés: *momentum)* y energía cinética
5.- El tensor métrico
6.- El cuadrivector de la velocidad
7.- Las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz son invariantes bajo las transformaciones de Lorentz
7.1.- La transformación de la fuerza de Lorentz
7.2.- La transformación de los campos eléctrico y magnético
7.3.- La transformación de Lorentz de las ecuaciones de Maxwell
7.4.- La transformación del potencial electromagnético

1. LAS TRANSFORMACIONES DE GALILEO

En la mecánica newtoniana, las coordenadas cartesianas ordinarias x^i se transforman en nuevas coordenadas, $\bar{x}^i$ según ***la transformación de Galileo***, en el supuesto de que el observador se mueva en línea recta, en la dirección de x^1, con velocidad v constante:

(1) $\bar{x}^1 = x^1 - vt$
(2) $\bar{x}^2 = \bar{y} = y$
(3) $\bar{x}^3 = \bar{z} = z$
(4) $\bar{t} = t \Rightarrow \bar{x}^4 = c\bar{t} = ct$

2. LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Einstein propuso ***el principio de la relatividad*** y de la constancia de la velocidad de la luz como sigue:

"1. Las leyes que rigen el cambio en sistemas físicos no son afectadas por la referencia a un sistema u otro sistema de coordenadas, en el caso de movimiento lineal uniforme.

2. Cualquier rayo de luz se mueve en un sistema inercial de coordenadas con una velocidad determinada c, independientemente del hecho si el rayo de luz es emitido por un cuerpo estacionario o en movimiento." [1728]

Estos principios tienen consecuencias notables y observables en lo que respecta la medición del espacio y del tiempo, cuando un objeto viaja a una velocidad muy alta, cercana a la de la luz. ***La***

[1728] Albert Einstein, *El Principio de la Relatividad*, reproducido en Stephen Hawking, *The Illustrated on the Shoulders of Giants* (2004): 210

'transformación de Lorentz' L^{α}_{β} nos indica cómo cambia esta medición del espacio y del tiempo.
(5) $\bar{x}^{\alpha} = L^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}$

La transformación de Lorentz de un sistema de coordenadas $\bar{S}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4)$ que se aleja con una velocidad v de otro sistema de coordenadas $S(x^1, x^2, x^3, x^4)$, en la dirección del eje x se representa por la siguiente matriz:

$$(6)\ \bar{x}^{\alpha} = \begin{pmatrix} a_{11}......0..........0........a_{14} \\ 0.........1..........0........0 \\ 0.........0..........1........0 \\ a_{41}......0..........0.......a_{44} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

La razón por qué $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{34} = a_{42} = a_{43} = 0$, es que el movimiento es en la dirección del eje x^1, razón por la cual $\bar{x}^1$ no tiene componentes en y y z; $\bar{x}^2$ no los tiene en x y z; $\bar{x}^3$ no los tiene en x y; y $\bar{x}^4$ no los tiene en y y z. Si el movimiento fuera en una dirección arbitraria con una velocidad u^{v} con cuatro componentes (u^1, u^2, u^3, u^4), ninguna de estas componentes sería cero, como veremos más adelante.

De (5) y (6), obtenemos:

$$(7)\ \begin{aligned} \bar{x}^1 &= a_{11}x^1 + a_{14}x^4 \\ \bar{x}^2 &= x^2 \\ \bar{x}^3 &= x^3 \\ \bar{x}^4 &= a_{41}x^1 + a_{44}x^4 \end{aligned}$$

Ahora bien, para una señal luminosa que viaja con velocidad c desde el centro de una esfera hacia la superficie, recorriendo la distancia r (el radio de la esfera) en t segundos, por el teorema de Pitágoras, es válida la siguiente afirmación:
(8) $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^3 = (ct)^2 = (x^4)^2$

De (8), obtenemos (9):
(9) $r^2 - c^2t^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2$

Llevamos (7) al cuadrado, para igualar con (9):
(10) $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 =$
$a_{11}{}^2(x^1)^2 + 2a_{11}a_{14}x^1x^4 + a_{14}{}^2(x^4)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - a_{41}{}^2(x^1)^2 - 2a_{41}a_{44}x^1x^4 - a_{44}{}^2(x^4)^2$

Igualamos los términos con coeficientes de potencias iguales en (9) y (10):
(11) $a_{11}{}^2 - a_{41}{}^2 = 1$

(12) $a_{14}{}^2 - a_{44}{}^2 = -1$

(13) $2a_{11}a_{14}x^1x^4 - 2a_{41}a_{44} = 0 \Rightarrow a_{11}a_{14} = a_{41}a_{44}$

Tenemos cuatro incógnitas y tres ecuaciones, de modo que nos falta una cuarta ecuación para resolverlas. Dado que el sistema $\bar{S}$ de mueve con velocidad v con respecto al sistema S y que, por definición:

(14) $\beta = v/c$

se sigue que para el origen del sistema $\bar{S}$:

(15) $\bar{x}^1 = 0$ y:

(16) $x^1 = vt = \frac{v}{c}(ct) = \beta x^4$

de modo que:

(17) $\bar{x}^1 = a_{11}x^1 + a_{14}x^4 = a_{11}vt + a_{14}x^4 = a_{11}\beta x^4 + a_{14}x^4 = 0$

De (17) se deduce que:

(18) $a_{11}\beta + a_{14} = 0 \Rightarrow a_{14} = -a_{11}\beta$

Ahora ya tenemos cuatro ecuaciones (11, 12, 13 y 18), para poder obtener el valor de las cuatro variables (a_{11}, a_{14}, a_{41} y a_{44}). Sustituimos primero a_{14} por $-a_{11}\beta$ para llegar a:

(11) $a_{11}{}^2 - a_{41}{}^2 = 1 \Rightarrow -\beta^2 a_{11}{}^2 + \beta^2 a_{41}{}^2 = -\beta^2$

(19) $a_{11}{}^2\beta^2 - a_{44}{}^2 = -1 \Rightarrow -a_{11}{}^2\beta^2 + a_{44}{}^2 - 1 = 0$

(20) $-a_{11}{}^2\beta - a_{41}a_{44} = 0 \Rightarrow -a_{11}{}^2\beta^2 - a_{41}a_{44}\beta = 0$

Sumamos (11) y (19) y también (19) y (20):

(21) $\beta^2 a_{41}{}^2 + \beta^2 - a_{44}{}^2 + 1 = 0$

(22) $a_{44}{}^2 - 1 + a_{41}a_{44}\beta = 0 \Rightarrow a_{41} = \dfrac{1 - a_{44}{}^2}{a_{44}\beta}$

Sustituimos (22) en (21):

(23) $\dfrac{\beta^2}{\beta^2}(\dfrac{1}{a_{44}} - a_{44})^2 - a_{44}{}^2 + 1 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a_{44}{}^2} - 1 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a_{44}{}^2} = 1 - \beta^2$

Ahora bien, definimos la variable γ como:

(24) $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

De (24) y (14), obtenemos:

(25) $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Combinando (23) y (25), obtenemos:
(26) $a_{44} = \gamma$

Combinando (22) y (26), obtenemos:

(27) $$a_{41} = \frac{1-\gamma^2}{\beta\gamma} = \frac{1-\frac{1}{1-\beta^2}}{\beta\gamma} = \frac{-\beta^2}{\beta\gamma(1-\beta^2)} = -\beta\frac{\gamma^2}{\gamma} = -\beta\gamma$$

Recordemos (11) y la combinamos con (26) y (27):

(28) $$a_{11}{}^2 - a_{41}{}^2 = 1 \Rightarrow a_{11}{}^2 = 1+\beta^2\gamma^2 = 1+\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2 \Rightarrow a_{11} = \gamma$$

Recordemos (18) y la combinamos con (28):
(29) $a_{11}\beta + a_{14} = 0 \Rightarrow a_{14} = -a_{11}\beta = -\beta\gamma$

Ahora ya podemos representar la transformación de Lorentz en forma matricial, con los resultados que acabamos de obtener:

(30) $$\begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \\ \bar{x}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ....\gamma......0......0.....-\beta\gamma \\ ......0......1......0...........0 \\ ......0......0......1...........0 \\ -\beta\gamma......0......0...........\gamma \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

En el caso de un movimiento que no va en la dirección de un solo eje ($\bar{u}_x \neq 0, \bar{u}_y \neq 0, \bar{u}_z \neq 0$ y $\beta_1 = {}^{u_x}\!/_{c}, \beta_2 = {}^{u_y}\!/_{c}, \beta_3 = {}^{u_z}\!/_{c}, \beta = {}^{u^v}\!/_{c}$), las cosas se complican y el resultado es el siguiente[1729]

(31) $$L^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 1+\frac{(\gamma-1)\beta_1{}^2}{\beta^2}..........\frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2}.............\frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2}.......-\beta_1\gamma \\ ......\frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_1}{\beta^2}.......1+\frac{(\gamma-1)\beta_2{}^2}{\beta^2}............\frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2}......-\beta_2\gamma \\ ....\frac{(\gamma-1)\beta_3\beta_1}{\beta^2}...........\frac{(\gamma-1)\beta_3\beta_2}{\beta^2}......1+\frac{(\gamma-1)\beta_3{}^2}{\beta^2}........-\beta_3\gamma \\ ....-\beta_1\gamma.....................-\beta_2\gamma.....................-\beta_3\gamma......................\gamma \end{pmatrix}$$

[1729] John Jackson, *Classical Electrodynamics*, second edition (1975): 541

Para llegar de (31) a (30) basta sustituir en (31) los supuestos del caso particular (30), a saber, $\beta_2 = \beta_3 = 0$ y $\beta_1 = \beta$

Esta misma información contenida en la matriz (30) y (31) se ve así en forma tensorial:
(32) $\bar{x}^{\alpha} = L^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}$

Con base en (31), obtenemos que $\bar{x}^2 = x^2$ y $\bar{x}^3 = x^3$ y, además $\bar{x}^1$ (33) y $\bar{x}^4$ (34):

(33) $\bar{x}^1 = \gamma x^1 - \beta\gamma(ct) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x^1 - vt)$

(34) $\bar{x}^4 = c\bar{t} = \gamma ct - \beta\gamma x^1$

Aquí cabe observar que las ecuaciones (33) y (34) se reducen a la transformación de Galileo, si suponemos que $v << c \Rightarrow \beta = {}^{v}\!/_{c} \cong 0$ y $\gamma = 1$:

(1) $\bar{x}^1 = x^1 - vt$
(4) $\bar{t} = t \Rightarrow \bar{x}^4 = c\bar{t} = ct$

3. LA DILATACIÓN DEL TIEMPO

De lo anterior podemos comprobar ***la dilatación del tiempo*** que se constató empíricamente en la sección 8, como veremos a continuación.

La (34) se evalúa para un tiempo inicial t_i y un tiempo posterior t_p en la misma posición x^1:

(35) $\bar{t} = \gamma t - \dfrac{\beta\gamma x^1}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - {}^{v^2}\!/_{c^2}}}(t - \dfrac{v}{c^2}x^1) \quad \Rightarrow$

Por lo tanto:

(36) $\Delta\bar{x}^4 = \bar{x}^4_p - \bar{x}^4_i = c\bar{t}_p - c\bar{t}_i$

De (34), (35) y (36) se obtiene:

(37) $c\Delta\bar{t} = c(\bar{t}_p - \bar{t}_i) = -\beta\gamma x^1 + \gamma ct_p + \beta\gamma x^1 - \gamma ct_i = \gamma c(t_p - t_i) = \gamma c\Delta t$

De (37) se obtiene el resultado que se obtuvo empíricamente en la sección 8 de este libro:

(38) $\Delta\bar{t}_{observador} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\Delta t_{inercial}$

Por ejemplo, si $v = .6c$ se sigue que:

(39) $\Delta t_o = \dfrac{1}{\sqrt{1 - .36}}\Delta t = 1.25\Delta t$

Esto significa que el observador constata que, cuando ha pasado un minuto en el reloj de la persona que viaja con una velocidad de $v = .6c$, con respecto al sistema de coordenadas en cuyo origen se encuentra el observador, en el propio reloj del observador han pasado un minuto y quince segundos. Estos efectos son reales y fueron corroborados empíricamente. La dilatación del tiempo fue observada por primera vez en 1960, empleando dos así llamados relojes de Mossbauer, que funcionan con base en fotones emitidos por un isótopo radioactivo del fierro. Partiendo de una sincronicidad de dos relojes con una precisión de $1/10^{16}s$. Un reloj sigue en reposo, el otro gira rápidamente. *Se puede observar que el tiempo en el reloj en movimiento se retrasa con respecto al tiempo del reloj en reposo con un factor equivalente a* $\Delta\bar{t}_{reloj.en.reposo} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta t_{reloj.en.movimiento}$, es decir, lo predicho por la teoría.[1730]

El lector podría objetar esta teoría con la famosa paradoja de los gemelos, en la cual un hermano H se encuentra en S y otro, $\bar{H}$, en $\bar{S}$. Como todo es 'relativo', la velocidad $v = .6c$ del sistema $\bar{S}$ con respecto al sistema S, es menos la velocidad ($-v = -.6c$) del sistema S con respecto al sistema $\bar{S}$. Entonces, si observamos los relojes desde el origen del sistema S, para H habría pasado un tiempo 25% mayor que para $\bar{H}$, pero si los observamos desde el origen de $\bar{S}$, $\bar{H}$ habría envejecido más que H. Esta paradoja es un sofisma, como podemos entender de la siguiente manera. Supongamos que 100 relojes de H en el sistema S, todos indicando la misma hora, se depositan a lo largo del camino de millones de kilómetros recorrido por $\bar{H}$ que viaja en $\bar{S}$. Al final del viaje se toma una foto del último reloj de H y del reloj de $\bar{H}$. Aparecerá la diferencia de hora predicha por la ecuación (39) y no otra.

4. LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ DEL MOMENTO Y ENERGÍA CINÉTICA

De acuerdo a la mecánica newtoniana, el momento es el producto de masa y velocidad:

(I) $p = mv$

Para determinar el momento de un electrón atraído por un campo magnético, se usa el radio del camino circular de la partícula desviada por este campo. La relación entre el radio y el momento se deriva de la fuerza necesaria para una ruta circular de cualquier objeto atraído por una fuerza central:

(II) $F = \frac{mv^2}{r}$

La fuerza magnética F que atrae una partícula es una función del campo magnético B, la carga q de la partícula y su velocidad v:

(III) $F = Bqv$

De la igualdad de (II) y (III) obtenemos la relación entre el radio de la ruta circular r y el momento p:

[1730] Véase Jay Orear, *Física* (1989): 174

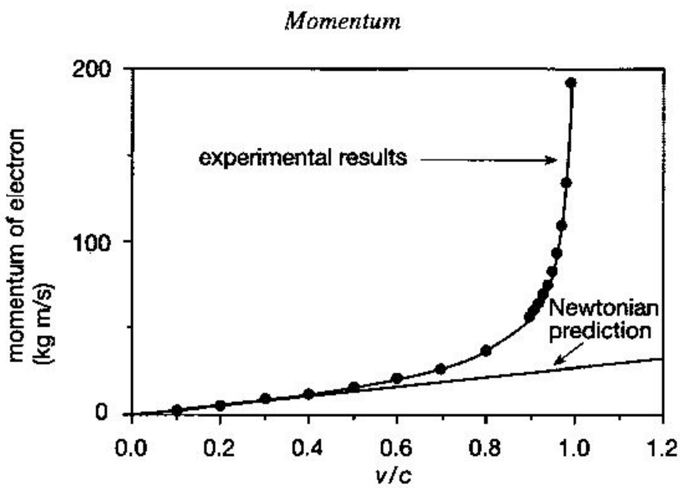
(IV) $r = \frac{mv}{Bq} = \frac{p}{Bq} \Rightarrow p = Bqr$

Pero, una serie de experimentos que se hicieron de 1909 a 1915 sobre el momento (en inglés: *momentum*) de electrones de alta velocidad (Bucherer, Kaufman, Guye & Lavanchy), refutan las predicciones basadas en estas ecuaciones newtonianas, y corroboran la transformación de Lorentz:

(VA) $p = mv\gamma = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$

(V B) $r = \frac{mv}{Bq\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$

La siguiente gráfica[1731] sintetiza los resultados de estos experimentos realizados de 1909 a 1915:



La creciente divergencia entre Newton y Einstein, en el caso de velocidades altas, se observa también pasa si medimos la energía de una partícula, la cual –si no se encuentra en el campo gravitacional de otra partícula—es igual a la suma de la energía cinética K y energía intrínseca U_{int}:

(VI) $E = K + U_{\text{int}} = K + mc^2 \Rightarrow K = E - mc^2$

Dado que energía y materia, según Einstein, son intercambiables o 'simétricas', podemos expresar la energía como una función de la masa, multiplicada por un factor γc^2 cuyo valor depende de la velocidad variable v de la partícula y la velocidad constante c de la luz:

(VII) $E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$

[1731] John Allday, *Quarks, Leptons and the Big Bang*. *Second edition* (2002): 25

Combinando (VI) y (VII), obtenemos:
(VIII) $K = (\gamma - 1)mc^2$

Solamente si la partícula está en reposo $v = 0$, Newton y Einstein coinciden, es decir, si $\gamma = 1$, $E = mc^2$ y $T = 0$. Pero si $v \neq 0$, los resultados de ambos van divergiendo. Veamos esto en el caso del trabajo realizado W al aplicar una fuerza F a un objeto, acelerándolo por cierta distancia r:
(IX) $W = Fr = \Delta K$ (unidades Joules = $kgm^2 s^{-2}$)

Según Newton, el trabajo realizado es:
(X) $\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$
pero, según Einstein:
(XI) $\Delta K = K_2 - K_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2 / c}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2 / c}} \right) mc^2$

Supongamos que la fuerza se aplica a un objeto que en el momento $t = 1$ está en reposo $v_1 = 0 \Rightarrow K_1 = 0$ y que acelera hasta una velocidad $v_2 = 0.1c$ en el momento $t = 2$. En este caso, según Newton, el trabajo realizado es:
(XII) $W_N = \Delta K = K_2 - 0 = 0.005mc^2$

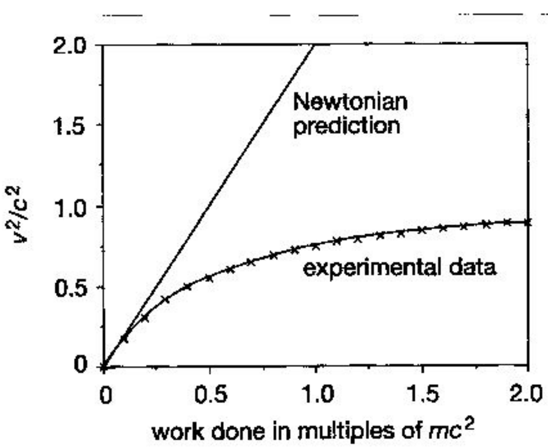
Y según Einstein:
(XIII) $W_E = (\frac{1}{\sqrt{1 - 0.01}} - 1)mc^2 = 0.0050378mc^2$

En este caso, la diferencia es relativamente pequeña, pero si se trata de $v_2 = .5c$, la diferencia llega a ser más grande:
(XIV) $W_N = 0.125mc^2$ y
(XV) $W_E = 0.1547mc^2$

Para velocidades cercanas a la de la luz, por ejemplo, $v = .9c$ la diferencia es considerable:
(XVI) $W_N = 0.405mc^2$
(XVII) $W_E = 1.294157mc^2$

En términos newtonianos, el trabajo realizado llega a un límite máximo es $W_N = 0.5mc^2$ cuando $v \cong c$, pero en el caso einsteiniano, el trabajo realizado se acerca a infinito cuando la velocidad se acerca a la de la luz. Mi calculadora Casio va hasta $v = 0.999999999c$, con un trabajo realizado de $W_E = 22{,}360mc^2$ y luego se niega a calcular el trabajo para velocidades más altas. También estas predicciones newtonianas y einsteinianas sobre la energía cinética han sido puestas a prueba en experimentos y han sido refutadas y corroboradas, respectivamente como se puede observar en la siguiente gráfica.[1732]

Gráfica. Predicciones newtonianas y relativistas sobre la energía cinética



La ecuación (V) nos dice también que las partículas que no tienen masa, deben viajar con la velocidad de la luz, y viceversa, una partícula que viaja con la velocidad de la luz, solamente lo puede hacer si tiene una masa cero, porque en tal caso, $p = \frac{0 * c}{\sqrt{1 - c^2 / c^2}} \rightarrow \frac{0}{0}$, una cantidad no definida por las matemáticas, pero no imposible tampoco, si se calcula el límite correspondiente. Podemos calcular el momento de tales partículas de otra manera. Dado que según (V) $p = mv\gamma$, se sigue que en el caso de $v = c$, el momento es $mc\gamma$, lo que solamente es posible, como ya vimos, si $m = 0$, lo que no permite determinar el momento de la partícula. Pero, dado que la energía de la partícula, según (VII) es $E = \gamma\, m c^2$, se sigue que:

(XX) $p = \frac{E}{c}$

Ahora bien, de acuerdo a la teoría de Planck, la energía del fotón, es

(XXI) $E_{fotón} = \frac{hc}{\lambda}$

se sigue que:

(XXII) $p = \frac{h}{\lambda}$

lo que representa el momento (en inglés: *momentum)* relativista de un fotón, y de cualquier partícula sin masa que viaja con la velocidad de la luz, como por ejemplo, un gluón, o un neutrino.

1732 John Allday, *Quarks, Leptons and the Big Bang*. *Second edition* (2002: 30

Una manera de salvar la ecuación newtoniana es aceptar el hecho einsteiniano que la masa de una partícula, desde el punto de vista del observador, incrementa con la velocidad, es decir:

(XXIII) $p = Mv = \dfrac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow M = \dfrac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

en donde m es la masa de reposo (la newtoniana) y M la masa que incrementa con la velocidad la cual se acerca a infinita cuando la velocidad se acerca a la de la luz (menos el caso, desde luego, cuando $m = 0$).

5. EL TENSOR MÉTRICO

Ahora deduciremos el tensor métrico del sistema transformado.

Recordemos:

(32) $\bar{x}^{\alpha} = L^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}$

De (32) se deduce (40):

(40) $d\bar{x}^{a} = L^{\alpha}_{\beta} dx^{\beta}$

De (40) se deducen (41), (42), (43) y (44)

(41) $d\bar{x}^1 = \gamma dx^1 + (0)dx^2 + (0)dx^3 - \beta\gamma dx^4$

(42) $d\bar{x}^2 = 0 + (1)dx^2 + 0 + 0$

(43) $d\bar{x}^3 = 0 + 0 + (1)dx^3 + 0$

(44) $d\bar{x}^4 = L^4_{\beta} dx\beta = -\beta\gamma dx^1 + 0 + 0 + \gamma dx^4$

Una idea genial de Einstein (entre otras) fue el entender que si un fotón, con la velocidad de la luz c, recorre en t segundos una distancia ct equivalente al radio r de una esfera, esta distancia no cambia si cambiamos el sistema de coordenadas de la esfera, es decir, que $(ds)^2 = (d\bar{s})^2 = (cdt)^2$. La forma de la esfera no cambia, *aún* si cambiamos el estado de movimiento del observador. En el ***'espacio de Minkowski'*** la distancia entre dos puntos es siempre la misma, a saber, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$

Recordemos que, por definición:

(45) $(ds)^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 + g_{44}(dx^4)^2$

y también:

(46) $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$

(47) $(d\bar{s})^2 = \bar{g}_{11}(d\bar{x}^1)^2 + \bar{g}_{22}(d\bar{x}^2)^2 + \bar{g}_{33}(d\bar{x}^3)^2 + \bar{g}_{44}(d\bar{x}^4)^2$

De (42), (43), (45), (46) y (47) se obtiene.

(48) $\bar{g}_{22} = g_{22} = \bar{g}_{33} = g_{33} = 1$; $d\bar{x}^2 = dx^2$ & $d\bar{x}^3 = dx^3$

De (45), (47) y (48) obtenemos:
(49) $(dx^1)^2 + g_{44}(dx^4)^2 = \bar{g}_{11}(d\bar{x}^1)^2 + \bar{g}_{44}(d\bar{x}^4)^2$

De (41), (44) y (49), obtenemos:

(50) $$(dx^1)^2 + g_{44}(dx^4)^2 = \begin{array}{l} \bar{g}_{11}[\gamma^2(dx^1)^2 - 2\beta\gamma^2(dx^1)(dx^4) + \beta^2\gamma^2(dx^4)^2] \\ + \bar{g}_{44}[\beta^2\gamma^2(dx^1)^2 - 2\beta\gamma^2(dx^1)(dx^4) + \gamma^2(dx^4)^2] \end{array}$$

De (50) y del hecho que $-2\beta\gamma^2 \neq 0$ siguen las siguientes tres igualdades
(51) $1 = \bar{g}_{11}\gamma^2 + \bar{g}_{44}\beta^2\gamma^2$
(52) $g_{44} = \bar{g}_{11}\beta^2\gamma^2 + \bar{g}_{44}\gamma^2$
(53) $0 = \bar{g}_{11} + \bar{g}_{44} \Rightarrow \bar{g}_{11} = -\bar{g}_{44}$

De (51) & (53) se obtiene que:
(54) $\bar{g}_{11}\gamma^2 - \bar{g}_{11}\beta^2\gamma^2 = 1 \Rightarrow \bar{g}_{11}(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) = 1 \Rightarrow \bar{g}_{11}\gamma^2(1-\beta^2) = 1$

Dado que $\gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2}$, se deduce de (54) que:
(55) $\bar{g}_{11} = 1$

De (53) y (55) se deduce que:
(56) $\bar{g}_{44} = -1$

De (52), (54) y (55) se obtiene:
(57) $g_{44} = \beta^2\gamma^2 - \gamma^2 = -\gamma^2(1-\beta^2) = -1$

Recordemos:
(45) $(ds)^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 + g_{44}(dx^4)^2$

(46) $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$

(47) $(d\bar{s})^2 = \bar{g}_{11}(d\bar{x}^1)^2 + \bar{g}_{22}(d\bar{x}^2)^2 + \bar{g}_{33}(d\bar{x}^3)^2 + \bar{g}_{44}(d\bar{x}^4)^2$

De (45), (46) & (57), se deduce que:

(58) $(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2$ y $dx^4 = cdt$

De (47), (55) y (56) se deduce que.
(59) $(d\bar{s})^2 = (d\bar{x}^1)^2 + (d\bar{x}^2)^2 + (d\bar{x}^3)^2 - (d\bar{x}^4)^2$ y $d\bar{x}^4 = cd\bar{t}$

En conclusión, el tensor métrico en el sistema no transformado es exactamente idéntico al tensor métrico en el sistema transformado, a saber:

(60) $$g_{ab} = \bar{g}_{ab} = \begin{pmatrix} 1.......0........0.......0 \\ 0.......1........0.......0 \\ 0.......0........1.......0 \\ 0.......0........0....-1 \end{pmatrix}$$

La función de este tensor métrico $g_{ab} = \bar{g}_{ab}$***, en la relatividad especial, se reduce a subir y bajar índices en el álgebra tensorial*** y expresar en forma compacta el producto escalar de tensores.

6. EL CUADRIVECTOR DE LA VELOCIDAD

Supongamos que $\bar{v}$ es el vector de velocidad con que el sistema $\bar{S}$ se mueve con respecto al sistema S, en la dirección de x^1 y que una partícula q se mueve con velocidad ω, medida en S, y velocidad ϖ, medida en $\bar{S}$.

Recordemos:
(33) $\bar{x}^1 = \gamma x^1 - \beta\gamma(ct)$

Con base en (33) definimos la velocidad ϖ
(61) $\varpi = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \gamma(\frac{dx^1}{d\bar{t}} - \beta c\frac{dt}{d\bar{t}})$

Por la regla de la cadena:
(62) $\frac{dx^1}{d\bar{t}} = \frac{dx^1}{dt}\frac{dt}{d\bar{t}}$

De (61) y (62) obtenemos:
(63) $\varpi = \gamma\frac{dt}{d\bar{t}}(\frac{dx^1}{dt} - \beta c)$

Por definición:

(64) $\omega = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2}$

Dado que, en este caso particular,

(65) $dx^2 / dt = dx^3 / dt = 0$, se sigue que:

(66) $\omega = \frac{dx^1}{dt}$

De (63), (66) y (14) obtenemos:

(67) $\overline{\omega} = \gamma \frac{dt}{d\bar{t}}(\omega - v)$

Recordemos que:

(34) $\bar{x}^4 = c\bar{t} = \gamma ct - \beta\gamma x^1$

De (34) obtenemos, derivando sobre $d\bar{t}$:

(68) $c\frac{d\bar{t}}{d\bar{t}} = c = \gamma(c\frac{dt}{d\bar{t}} - \beta\frac{dx}{d\bar{t}}) = \gamma(c\frac{dt}{d\bar{t}} - \beta\frac{dx^1}{dt}\frac{dt}{d\bar{t}} = \gamma\frac{dt}{d\bar{t}}(c - \beta\omega)$

De (68) obtenemos, dividiendo los términos entre c:

(69) $\gamma\frac{dt}{d\bar{t}}(1 - \frac{\omega v}{c^2}) = 1 \Rightarrow \frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{1}{\gamma(1 - \omega v/c^2)}$

Recordemos.

(66) $\overline{\omega} = \gamma \frac{dt}{d\bar{t}}(\omega - v)$

De (66) y (69) obtenemos.

(70) $\overline{\omega} = \frac{\omega - v}{1 - \omega v/c^2}$

Análogamente:

(71) $\omega = \frac{\overline{\omega} + v}{1 + \overline{\omega} v/c^2}$

Recordemos:

(32) $\bar{x}^\alpha = L^\alpha_\beta x^\beta$

Comparando (70) y (71), por un lado y, por otro lado, (32) se comprueba que ω y $\overline{\omega}$ ***no*** se transforman según la transformación de Lorentz del vector de posición $\bar{x}^\alpha$, es decir, $\overline{\omega} \neq L^\alpha_\beta \omega^\beta$, con otras palabras, no se comportan como cuadrivectores. Para remediar esta situación vamos a definir el siguiente cuadrivector de velocidad:

(72) $u^{\nu} = \dfrac{dx^{\nu}}{d\tau}$

en donde τ es el tiempo medido en el sistema donde la partícula q está en reposo, por ejemplo el sistema $\bar{S}$.

Recordemos:

(34) $\bar{x}^4 = c\bar{t} = \gamma ct - \beta\gamma x^1 = \gamma(x^4 - \beta x^1)$

Haciendo la transformación al revés, de x^4 a $\bar{x}^4$ y tomando en cuenta que $\bar{t} = \tau$ (la partícula q está en reposo en el sistema $\bar{S}$) solamente cambia el signo:

(73) $x^4 = \gamma(\bar{x}^4 + \beta\bar{x}^1) \Rightarrow ct = \gamma(c\tau + \beta\bar{x}^1)$

De (73) obtenemos:

(74) $c\dfrac{dt}{d\tau} = \gamma\left(c\dfrac{d\tau}{d\tau} + \beta\dfrac{d\bar{x}^1}{d\tau}\right)$

Ahora bien, dado que partimos del supuesto que la partícula q está en reposo con respecto al sistema $\bar{S}$, se sigue que:

(75) $\dfrac{d\bar{x}^1}{d\tau} = 0$

De (74) y (75) se obtiene:

(76) $c\dfrac{dt}{d\tau} = \gamma c \Rightarrow \dfrac{dt}{d\tau} = \gamma$

De (72) y (76) obtenemos:

(77) $u^{\nu} = \dfrac{dx^{\nu}}{d\tau} = \dfrac{dx^{\nu}}{dt}\dfrac{dt}{d\tau} = \gamma\dfrac{dx^{\nu}}{dt} = \gamma_{\omega}\omega^{\nu}$

Recordemos:

(24) $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Para una partícula con velocidad ω medida en el sistema S, obtenemos de (24):

(78) $\gamma_{\omega} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \omega^2/c^2}}$

De (77) y (78), obtenemos:

(79) $u^{\nu} = \dfrac{\omega^{\nu}}{\sqrt{1-\omega^2/c^2}}$

De modo que las cuatro componentes (tres espaciales y una temporal) de u^{ν}:

(80) $u^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\omega}\omega^1 \\ \gamma_{\omega}\omega^2 \\ \gamma_{\omega}\omega^3 \\ \gamma_{\omega}c \end{pmatrix}$

A continuación comprobaremos que $\bar{u}^{\nu}$ es un cuadrivector. Recordemos:

(58) $(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2$ y $dx^4 = cdt$

Dado que en las coordenadas esféricas, para un fotón que viaja desde el centro de la esfera a la superficie es válida la afirmación:
(81) $(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2 = 0$

podemos reescribir (58) como:

(82) $(ds)^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2(dt)^2$

Dividimos los términos entre $c^2(dt)^2$:

(83) $\dfrac{(ds)^2}{c^2(dt)^2} = \dfrac{-\left(\dfrac{dx^1}{dt}\right)^2 - \left(\dfrac{dx^2}{dt}\right)^2 - \left(\dfrac{dx^3}{dt}\right)^2}{c^2} + 1$

Recordemos que:

(64) $\omega = \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{\left(\dfrac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dx^3}{dt}\right)^2}$

De (83) & (64) se deduce que:

(84) $\dfrac{(ds)^2}{c^2(dt)^2} = 1 - \omega^2/c^2$

Recordemos que:

(78) $\gamma_{\omega} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\omega^2/c^2}} \Rightarrow$

$$(85) 1-\omega^2/c^2=\frac{1}{\gamma_\omega{}^2}$$

De (84) & (85) se obtiene:

$$(86)\ \frac{(ds)^2}{c^2}=\frac{(dt)^2}{\gamma_\omega{}^2}$$

Recordemos:

$$(76)\ c\frac{dt}{d\tau}=\gamma c \Rightarrow \frac{dt}{d\tau}=\gamma \Rightarrow dt=\gamma_\omega d\tau \Rightarrow (dt)^2=\gamma_\omega{}^2(d\tau)^2$$

De (76) & (86) obtenemos:

$$(87)\ \frac{(ds)^2}{c^2}=(d\tau)^2 \Rightarrow d\tau=ds/c \quad \text{(dimensión: segundos)}$$

Ahora bien, ***dado que tanto*** ds ***como*** c ***son invariantes, podemos concluir que, en el espacio de Minkowski (sin campos gravitacionales), también*** $d\tau$ ***es invariante***. Ha sido necesario comprobar esto, para comprobar, a continuación, que $\bar{u}^\nu$ es un cuadrivector.

Recordemos:

$$(32)\ \bar{x}^\alpha=L^\alpha_\beta x^\beta$$

De (32) obtenemos:

$$(88)\ d\bar{x}^\alpha=L^\alpha_\beta dx^\beta$$

Dado que $d\tau$ ***es invariante, podemos dividir los términos entre*** $d\tau$ ***:***

$$(89)\ \frac{d\bar{x}^\alpha}{d\tau}=L^\alpha_\beta\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

Recordemos (77)

$$(77)\ (A)\ u^\nu=\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$\Rightarrow\ (B)\ u^\beta=\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$\&\ (C)\ \bar{u}^\alpha=\frac{d\bar{x}^\alpha}{d\tau}$$

Sustituimos en la ecuación (77C) la (88):

$$(90)\ \bar{u}^\alpha=L^\alpha_\beta\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

y sustituimos (77B) en (90):

(91) $\bar{u}^{\alpha} = L^{\alpha}_{\beta} u^{\beta}$,

lo que comprueba que** $\bar{u}^{\alpha}$ **se transforma tensorialmente, *quod erat demostrandum.*

Con respecto a la definición del tiempo propio, $d\tau = {}^{ds}/_{c}$, hemos de tomar en cuenta que solamente es correcta en el espacio de Minkowski, donde los objetos se mueven sin aceleración causada por algún campo gravitacional. La definición $d\tau = {}^{ds}/_{c}$ de la ecuación (87) es un caso muy particular, solamente válido cuando no existe un campo gravitacional fuerte. Pero, *generalmente los objetos se mueven acelerados o frenados por campos gravitacionales, lo que nos lleva a la teoría de la relatividad general*. En tal caso, las componentes de la diagonal en la métrica de la ecuación (60) cambian al integrarse factores que representan la curvatura del espacio-tiempo.

7. LAS ECUACIONES DE MAXWELL Y LA FUERZA DE LORENTZ SON INVARIANTES BAJO LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

En este apartado se analiza la invarianza de las ecuaciones de Maxwell y Lorentz bajo transformaciones coordenadas en el espacio de Minkowski.

7.1. LA TRANSFORMACIÓN DE LA FUERZA DE LORENTZ

En el espacio-tiempo cuatridimensional, el tensor del campo electromagnético se define por medio de la siguiente matriz:

$$(1)\, F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 \ldots\ldots\ldots B_3 \ldots\ldots\ldots -B_2 \ldots\ldots\ldots -{}^{E_1}/_{c} \\ -B_3 \ldots 0 \ldots\ldots\ldots\ldots B_1 \ldots\ldots\ldots -{}^{E_2}/_{c} \\ B_2 \ldots\ldots -B_1 \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots -{}^{E_3}/_{c} \\ {}^{E_1}/_{c} \ldots {}^{E_2}/_{c} \ldots\ldots {}^{E_3}/_{c} \ldots\ldots\ldots 0 \end{pmatrix} = \text{tensor del campo electromagnético}$$

Recordemos la métrica de Minkowski con la convención de signos +,+,+,-:

(2) = métrica de Minkowski

$$g_{ab} = \bar{g}_{ab} = \begin{pmatrix} 1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots -1 \end{pmatrix}$$

Combinando (1) y (2), se obtiene.

$$(3)\qquad F^{\alpha}{}_{\nu}=F^{\alpha\beta}g_{\beta\nu}=\begin{pmatrix} F^{1}{}_{1}=0............F^{1}{}_{2}=B_3.......F^{1}{}_{3}=-B_2........F^{1}{}_{4}=E_1/c \\ F^{2}{}_{1}=-B_3........F^{2}{}_{2}=0.........F^{2}{}_{3}=B_1..........F^{2}{}_{4}=E_2/c \\ F^{3}{}_{1}=B_2.........F^{3}{}_{2}=-B_1......F^{3}{}_{3}=0...........F^{3}{}_{4}=E_3/c \\ F^{4}{}_{1}=E_1/c......F^{4}{}_{2}=E_2/c.....F^{4}{}_{3}=E_3/c......F^{4}{}_{4}=0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que el cuadrivector velocidad se define como sigue:

$$(4)\, u^{\nu}=\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=\frac{dx^{\nu}}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\gamma_{\omega}\omega^{\nu}$$

en donde (ecuaciones (64) y (78) del apéndice de la relatividad especial):

$$\text{y (64)}\ \ \omega=\frac{dx}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2}$$

$$(78)\ \ \gamma_{\omega}=\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2/c^2}}$$

En forma explícita, el cuadrivector velocidad se expresa matricialmente como sigue:

$$(5)\, u^{\nu}=\begin{pmatrix}\gamma_{\omega}\omega^1\\ \gamma_{\omega}\omega^2\\ \gamma_{\omega}\omega^3\\ \gamma_{\omega}c\end{pmatrix}\Rightarrow \bar{u}=\begin{pmatrix}\gamma_{\omega}\omega^1\\ \gamma_{\omega}\omega^2\\ \gamma_{\omega}\omega^3\end{pmatrix}\ \text{y}\ u^4=\gamma_{\omega}c$$

Combinando (3) y (5), obtenemos las cuatro componentes de la siguiente matriz:

$$(3)\qquad F^{\alpha}{}_{\nu}=F^{\alpha\beta}g_{\beta\nu}=\begin{pmatrix} F^{1}{}_{1}=0............F^{1}{}_{2}=B_3.......F^{1}{}_{3}=-B_2........F^{1}{}_{4}=E_1/c \\ F^{2}{}_{1}=-B_3........F^{2}{}_{2}=0.........F^{2}{}_{3}=B_1..........F^{2}{}_{4}=E_2/c \\ F^{3}{}_{1}=B_2.........F^{3}{}_{2}=-B_1......F^{3}{}_{3}=0...........F^{3}{}_{4}=E_3/c \\ F^{4}{}_{1}=E_1/c......F^{4}{}_{2}=E_2/c.....F^{4}{}_{3}=E_3/c......F^{4}{}_{4}=0 \end{pmatrix}$$

$$(6)\, qF^{\alpha}{}_{\nu}u^{\nu}=q\begin{pmatrix}\gamma\omega^2B_3-\gamma\omega^3B_2+\gamma E_1\\ -\gamma\omega^1B_3+\gamma\omega^3B_1+\gamma E_2\\ \gamma\omega^1B_2-\gamma\omega^2B_1+\gamma E_3\\ \gamma\omega^1\frac{E_1}{c}.+\gamma\omega^2\frac{E_2}{c}+\gamma\omega^3\frac{E_3}{c}\end{pmatrix}$$

De (6) se deducen (7), (8), (9) y (10):

$$(7)\, qF^1_\nu u^\nu = q\gamma(E_1 + \omega^2 B_3 - \omega^3 B_2)$$
$$(8)\, qF^2_\nu u^\nu = q\gamma(E_2 - \omega^1 B_3 + \omega^3 B_1)$$
$$(9)\, qF^3_\nu u^\nu = q\gamma(E_3 + \omega^1 B_2 - \omega^2 B_1)$$
$$(10)\, qF^4_\nu u^\nu = q\gamma(\omega^1 \frac{E_1}{c} + \omega^2 \frac{E_2}{c} + \omega^3 \frac{E_3}{c})$$

Las ecuaciones (7) a (9), nos dan la fuerza de Lorentz tridimensional , recordemos:

(11)

$$\overline{\varpi} \times \overline{B} = \begin{pmatrix} ....\hat{\imath}...............\hat{\jmath}...............\hat{k} \\ ....\omega^1............\omega^2............\omega^3 \\ ....B^1............B^2............B^3 \end{pmatrix} = (\omega^2 B^3 - \omega^3 B^2)\hat{\imath} + (-\omega^1 B^3 + \omega^3 B^1)\hat{\jmath} + (\omega^1 B^2 - \omega^2 B^1)\hat{k}$$

De las ecuaciones (7), (8), (9) y (11) y suponiendo $\gamma = 1$ para bajas velocidades, se sigue la fuerza de Lorentz en el espacio tridimensional, en el sistema de unidades internacional:
(12) $\overline{F}_{EM} = q(\overline{E} + \overline{\varpi} \times \overline{B})$ (a diferencia de Jackson (1999), 3ª.edición, pág. 553, con el sistema de unidades gaussiano, donde $\overline{F}_{EM} = q(\overline{E} + \frac{\overline{\varpi}}{c} \times \overline{B})$).

La razón de cambio de la energía de la partícula se define como:
(13A) $\frac{q}{c}\overline{u} \bullet \overline{E}$ que para el caso no-relativista ($\gamma = 1$) será:
(13B) $q\overline{\varpi} \bullet \overline{E}$

Por lo tanto la cuarta componente (la ecuación 10) se identifica con la razón de cambio de la partícula relativista:

$$(14)\, qF^4_\nu u^\nu = q\gamma(\omega^1 \frac{E_1}{c} + \omega^2 \frac{E_2}{c} + \omega^3 \frac{E_3}{c}) = \frac{q}{c}\gamma\overline{\varpi} \bullet \overline{E}$$

Recordemos que $\gamma = \frac{dt}{d\tau}$ y sustituimos $\gamma = \frac{dt}{d\tau}$ en (12):

$$(13)\, \frac{dp^\alpha}{d\tau} = qF^\alpha_\nu u^\nu = q\frac{dt}{d\tau}[E_1 + \omega^2 B_3 - \omega^3 B_2, E_2 - \omega^1 B_3 + \omega^3 B_1,\; E_3 - \omega^1 B_2 - \omega^2 B_1] \Rightarrow$$
$$(14)\; \overline{F}_{sD} = \frac{dp^\alpha}{dt} = q[E_1 + \omega^2 B_3 - \omega^3 B_2, E_2 - \omega^1 B_3 + \omega^3 B_1,\; E_3 - \omega^1 B_2 - \omega^2 B_1] \Rightarrow$$
$$(15)\; \overline{F}_{sD} = \frac{dp^a}{dt} = q(E^a + \varepsilon^a_{ij}\omega^i B^j) = q(\overline{E} + \overline{\varpi} \times \overline{B}) \qquad (a = 1,2,3; n = 1,2,3)$$

$$(12)\ \frac{dp^{\alpha}}{d\tau} = qF^{\alpha}_{\nu}u^{\nu} = q\gamma[E_1 + \omega^2 B_3 - \omega^3 B_2\,, E_2 - \omega^1 B_3 + \omega^3 B_1,\ E_3 - \omega^1 B_2 - \omega^2 B_1]$$

7.2. LA TRANSFORMACIÓN DE LOS CAMPOS ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO

¿Cómo se transforma $F^{\alpha\beta}$? De la siguiente manera:

$$(16)\ \overline{F}^{\alpha\beta} = L^{\alpha}_{\mu}L^{\beta}_{\nu}F^{\mu\nu}$$

Recordemos el 'transformador' de las operaciones de transformación de Lorentz:

$$(17)\, L^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma ....0.......0..... -\beta\gamma \\ 0.........1.......0........0 \\ 0.........0.......1........0 \\ -\beta\gamma ....0.......0........\gamma \end{pmatrix}$$

$$(1)\quad F^{\mu\nu} = F^{\mu\beta}g_{\beta\nu} = \begin{pmatrix} F^1_1 = 0............F^1_2 = B_3.......F^1_3 = -B_2........F^1_4 = -E_1/c \\ F^2_1 = -B_3........F^2_2 = 0..........F^2_3 = B_1..........F^2_4 = -E_2/c \\ F^3_1 = B_2..........F^3_2 = -B_1......F^3_3 = 0...........F^3_4 = -E_3/c \\ F^4_1 = E_1/c\ ......F^4_2 = E_2/c\ .....F^4_3 = E_3/c\ ......F^4_4 = 0 \end{pmatrix}$$

Muchos términos son cero, a saber:

$$(18)\ \begin{matrix} L_{12} = L_{13} = L_{21} = L_{23} = L_{24} = L_{31} = L_{32} = L_{34} = L_{42} = L_{43} = 0 \\ \&\, F^1_1 = F^2_2 = F^3_3 = F^4_4 = 0 \end{matrix} :$$

Esto facilita el cálculo, por ejemplo:

(19)

$$\overline{F}^{11} = L^1_{\mu}L^1_{\nu}F^{\mu\nu} =$$

$$= L^1_1L^1_1F^{11} + L^1_1L^1_2F^{12} + L^1_2L^1_1F^{21} + L^1_1L^1_3F^{13} + L^1_3L^1_1F^{31} + L^1_2L^1_3F^{23} + L^1_3L^1_2F^{32} +$$

$$+ L^1_1L^1_4F^{14} + L^1_4L^1_1F^{41} + L^1_2L^1_4F^{24} + L^1_4L^1_2F^{42} + L^1_3L^1_4F^{34} + L^1_4L^1_3F^{43} + L^1_4L^1_4F^{44} =$$

$$0+0+0+0+0+0+0+\beta\gamma^2\frac{E_1}{c} - \beta\gamma^2\frac{E_1}{c} + 0+0+0+0+0 = 0$$

Otros términos no son cero, por ejemplo:

$$(20)\ \overline{F}^{12} = L^1_{\mu}L^2_{\nu}F^{\mu\nu} = L^1_1L^2_2F^1_2 + L^1_4L^2_2F^4_2 + 0 = \gamma B_3 - \gamma\beta\frac{E_2}{c}$$

De manera análoga se calculan los demás términos para llegar a la siguiente matriz, que representa las ecuaciones de Maxwell del campo electro-magnético, transformadas con la transformación de Lorentz, para obtener el tensor de transformación en el sistema barra $\overline{S}$:

(21)

$$\overline{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(B_3 - \frac{\beta E_2}{c}) & -\gamma(B_2 + \frac{\beta E_3}{c}) & -\frac{E_1}{c} \\ -\gamma(B_3 - \frac{\beta E_2}{c}) & 0 & B_1 & \gamma(\beta B_3 - \frac{E_2}{c}) \\ \gamma(B_2 + \frac{\beta E_3}{c}) & -B_1 & 0 & -\gamma(\beta B_2 + \frac{E_3}{c}) \\ \frac{E_1}{c} & -\gamma(\beta B_3 - \frac{E_2}{c}) & \gamma(\beta B_2 + \frac{E_3}{c}) & 0 \end{pmatrix}$$

Se trata, por lo tanto, de un tensor anti-simétrico, con traza cero. De (1) se deduce, además, que en el sistema barra $\overline{S}$:

$$(22) \quad \overline{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{B}_3 & -\overline{B}_2 & -\overline{E}_1/c \\ -\overline{B}_3 & 0 & \overline{B}_1 & -\overline{E}_2/c \\ \overline{B}_2 & -\overline{B}_1 & 0 & -\overline{E}_3/c \\ \overline{E}_1/c & \overline{E}_2/c & \overline{E}_3/c & 0 \end{pmatrix}$$

De (21 y (22) se deduce ***la transformación de los campos eléctricos y magnéticos***, por ejemplo (recuerda que $\beta = v/c$)

(23ª) $\overline{F}^{14} \Rightarrow \overline{E}_1 = E_1$ y (23B) $E_1 = \overline{E}_1$

(24ª) $\overline{F}^{24} \Rightarrow \overline{E}_2 = \gamma(-vB_3 + E^2)$ y (24B) $E_2 = \gamma(\overline{E}_2 + v\overline{B}_3)$

(25ª) $\overline{F}^{34} \Rightarrow \overline{E}_3 = \gamma(vB_2 + E^3)$ y (25B) $E_3 = \gamma(\overline{E}_3 - v\overline{B}_2)$

(26ª) $\overline{F}^{23} \Rightarrow \overline{B}_1 = B_1$ y (26B) $B_1 = \overline{B}_2$

(27ª) $\overline{F}^{13} \Rightarrow \overline{B}_2 = \gamma(B_2 + \frac{\beta E_3}{c})$ y (27B) $B_2 = \gamma(\overline{B}_2 - \frac{\beta \overline{E}_3}{c})$

(28ª) $\overline{F}^{21} \Rightarrow \overline{B}_3 = \gamma(B_3 - \frac{\beta E_2}{c})$ y (28B) $B_3 = \gamma(\overline{B}_3 + \frac{\beta \overline{E}_2}{c})$

De (17) y $J(J_x, J_y, J_z, J_4 = c\rho)$, obtenemos la corriente $\overline{J}$ y la densidad de carga $\overline{\rho}$ en el sistema con barra $\overline{S}$, en donde v es la velocidad y ρ la densidad de carga:

(29A) $\overline{J}_x = \gamma J_x - \beta\gamma c\rho = \gamma(J_x - v\rho)$ (29B) $J_x = \gamma(\overline{J}_x + v\overline{\rho})$

(30A) $\overline{J}_y = J_y$ (30B) $J_y = \overline{J}_y$

(31A) $\overline{J}_z = J_z$ (31B) $J_z = \overline{J}_z$

(32A) $\overline{J}_4 = c\overline{\rho} = \gamma\left(c\rho - \frac{v}{c}J_x\right)$ (32B) $J_4 = c\rho = \gamma\left(c\overline{\rho} + \frac{v}{c}\overline{J}_x\right)$

(33A) $\Rightarrow \bar{\rho} = \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2} J_x\right)$ (33B) $\rho = \gamma\left(\bar{\rho} + \frac{v}{c^2} \bar{J}_x\right)$

7.3. LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Aplicamos la transformación de Lorentz (ecuación 6.17) a las cuatro coordenadas para velocidades altas:

$$(17)\begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \\ \bar{x}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma.........0.......0.....-\beta\gamma \\ 0.........1.......0........0 \\ 0.........0.......1........0 \\ -\beta\gamma....0.......0........\gamma \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ ct \end{pmatrix}$$

Tomando en cuenta que $\beta = {}^{v}\!/\!_{c}$, este ejercicio nos da las coordenadas en el sistema $\bar{S}$, expresadas en términos del sistema S. También podemos proceder al revés, y expresar las coordenadas del sistema S en términos del sistema $\bar{S}$, lo que implica un cambio de signo (de – a +):

(34A) $\bar{x}^1 = \gamma(x^1 - vt)$ (34B) $x^1 = \gamma(\bar{x}^1 + v\bar{t})$

(35A) $\bar{x}^2 = x^2$ (35B) $x^2 = \bar{x}^2$

(36A) $\bar{x}^3 = x^3$ (36B) $x^3 = \bar{x}^3$

(37A) $\bar{x}^4 = c\bar{t} = \gamma(ct - \frac{v}{c} x^1)$ (37B) $x^4 = ct = \gamma(c\bar{t} + \frac{v}{c}\bar{x}^1)$

(38A) $\Rightarrow \bar{t} = \gamma(t - \frac{v}{c^2} x^1)$ (38B) $\Rightarrow t = \gamma(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}^1)$

Ahora toca deducir los operadores $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial t}$. Partimos de las ecuaciones (34B) y (38B). En ambas funciones f, las variables dependientes x y t, respectivamente, son una función de $\bar{x}$ y $\bar{t}$. Aplicando la regla de la cadena, obtenemos:

$$(39) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \bar{x}}$$

$$(40) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \bar{t}}$$

Derivando (34B) y (38B) sobre $\bar{x}$, obtenemos:

$$(41) \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} = \gamma$$

$$(42) \quad \frac{\partial t}{\partial \bar{x}} = \gamma \frac{v}{c^2}$$

Y derivando las mismas funciones sobre $\bar{t}$, obtenemos:

(43) $\dfrac{\partial x}{\partial \bar{t}} = \gamma v$

(44) $\dfrac{\partial t}{\partial \bar{t}} = \gamma$

Sustituimos (41) y (42) en (39), para obtener el operador $\dfrac{\partial}{\partial \bar{x}}$:

(45ª) $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\gamma + \dfrac{\partial f}{\partial t}\gamma \dfrac{v}{c^2} \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}} = \gamma\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ y (45B) $\dfrac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{x}} - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}}\right)$

Y sustituimos (43) y (44) en (40) para obtener el operador $\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}}$

(46ª) $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{t}} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\gamma v + \dfrac{\partial f}{\partial t}\gamma \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial \bar{t}} = \gamma\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + v\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ y (46B) $\dfrac{\partial}{\partial t} = \gamma\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}} - v\dfrac{\partial}{\partial \bar{x}}\right)$

Por razones obvias:

(47ª) $\dfrac{\partial}{\partial \bar{y}} = \dfrac{\partial}{\partial y}$ y (47B) $\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial \bar{y}}$

(48ª) $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{\partial}{\partial z}$ y (48B) $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Recordemos ahora las ecuaciones de Maxwell en el sistema S. Si las ecuaciones fueran invariantes en el sistema $\bar{S}$, obtendríamos:

$\mathrm{I_{ED}}$. $\nabla \bullet \bar{E} - \dfrac{\bar{\rho}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\partial \bar{E}_x}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{z}} - \dfrac{\bar{\rho}}{\varepsilon_0} = 0$ (ley de Gauss)

$\mathrm{II_{ED}}$. $\nabla \times \bar{E} + \dfrac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{t}} =$
$= \left(\left(\dfrac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{y}} - \dfrac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{z}}\right) + \dfrac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{t}}\right)i + \left(\left(\dfrac{\partial \bar{E}_x}{\partial \bar{z}} - \dfrac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{x}}\right) + \dfrac{\partial \bar{B}_y}{\partial \bar{t}}\right)j + \left(\left(\dfrac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{x}} - \dfrac{\partial \bar{E}_x}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial \bar{B}_z}{\partial \bar{t}}\right)k = 0$ (ley de inducción de Faraday)

$\mathrm{III_{ED}}$. $\nabla \bullet \bar{B} = \dfrac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{B}_y}{\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial \bar{B}_z}{\partial \bar{z}} = 0$ (ley de Gauss en magnetismo)

$$\nabla\times\overline{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\overline{E}}{\partial\overline{t}}-\mu_0\overline{J}=\left(\left(\frac{\partial\overline{B}_z}{\partial\overline{y}}-\frac{\partial\overline{B}_y}{\partial\overline{z}}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\overline{E}_x}{\partial\overline{t}}-\mu_0\overline{J}_x\right)i+$$

IV_{ED}.

$$+\left(\left(\frac{\partial\overline{B}_x}{\partial\overline{z}}-\frac{\partial\overline{B}_z}{\partial\overline{x}}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\overline{E}_y}{\partial\overline{t}}-\mu_0\overline{J}_y\right)j+\left(\left(\frac{\partial\overline{B}_y}{\partial\overline{x}}-\frac{\partial\overline{B}_x}{\partial\overline{y}}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\overline{E}_z}{\partial\overline{t}}-\mu_0\overline{J}_z\right)k=0$$

(ley de Ampère)

En el caso de II_{ED} e IV_{ED} cada uno de los componentes debe valer cero. Queremos comprobar que las ecuaciones de Maxwell realmente son invariantes en el espacio de Minkowski, empezando con la ley de Gauss (I_{ED}). Sustituimos (23ª), (24ª), (25ª) y (33ª) y (45ª), (47ª) y (48ª) en (49) para obtener (50):

(49) $$\nabla\bullet\overline{E}-\frac{\overline{\rho}}{\varepsilon_0}=\frac{\partial\overline{E}_x}{\partial\overline{x}}+\frac{\partial\overline{E}_y}{\partial\overline{y}}+\frac{\partial\overline{E}_z}{\partial\overline{z}}-\frac{\overline{\rho}}{\varepsilon_0}$$

(50) $$\Rightarrow\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_x+\frac{\partial\gamma(E_y-vB_z)}{\partial y}+\frac{\partial\gamma(E_z+vB_y)}{\partial z}-\gamma\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}+\frac{v}{c^2\varepsilon_0}J_x\right)=$$

$$=\gamma\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)-\gamma v\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\mu_0 J_x\right)=$$

$$=\gamma(\nabla\bullet E-\frac{\rho}{\varepsilon_0})-\gamma v(\nabla\times B_x-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\mu_0 J_x)$$

Dado que $(\nabla\bullet E-\frac{\rho}{\varepsilon_0})=0$ (ley de Gauss en sistema S) y $(\nabla\times B_x-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\mu_0 J_x)=0$ (componente x de la ley de Ampère en sistema S), se sigue que:

(51) $$\nabla\bullet\overline{E}-\frac{\overline{\rho}}{\varepsilon_0}=\gamma(\nabla\bullet E-\frac{\rho}{\varepsilon_0})-\gamma v(\nabla\times B_x-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\mu_0 J_x)=0$$ ***Q.E.D. (ley I_{ED})***

Ahora procedemos con la corroboración de la hipótesis de que la ley de inducción de Faraday es invariante. Sustituimos (23ª) a (28ª) y (46ª) en II_{ED} para obtener:

(23ª) $\overline{F}^{14}\Rightarrow\overline{E}_1=E_1$

(24ª) $\overline{F}^{24}\Rightarrow\overline{E}_2=\gamma(-vB_3+E^2)$

(25ª) $\overline{F}^{34}\Rightarrow\overline{E}_3=\gamma(vB_2+E^3)$

(26ª) $\overline{F}^{23}\Rightarrow\overline{B}_1=B_1$

(27ª) $\overline{F}^{13}\Rightarrow\overline{B}_2=\gamma(B_2+\frac{\beta E_3}{c})$

(28ª) $\overline{F}^{21}\Rightarrow\overline{B}_3=\gamma(B_3-\frac{\beta E_2}{c})$

(47ª) $\frac{\partial}{\partial\overline{y}}=\frac{\partial}{\partial y}$ y (47B) $\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial\overline{y}}$

(48ª) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z}$ y (48B) $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

(46ª) $\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)$

Veamos primero el primero de los tres componentes. Queremos comprobar que:

(52) $\left(\left(\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{t}}\right)i = 0$

(53) $\left(\left(\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{t}}\right)i = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y}[\gamma(E_z + vB_y)] - \frac{\partial}{\partial z}[\gamma(E_y - vB_z)]\right) + \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)B_x\right)i \Rightarrow$

(54) $\gamma v\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) + \gamma\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t}\right) = \gamma v(\nabla \bullet B) + \gamma[\nabla \times E) + \frac{\partial B_x}{\partial t}]_{comp.X}$

Dado que $\nabla \bullet B = 0$ (III$_{ED}$) y $(\nabla \times E)_{comp.X} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$ (II$_{ED}$), se sigue que el primer componente de $\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ es cero. Análogamente se comprueba lo mismo para el segundo y tercer componente. Por lo tanto:

(55) $\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$ ***Q.E.D.*** (ley de inducción de Faraday)

De (38) a (43) obtenemos la transformación de las ecuaciones de Maxwell:

(39) $\nabla \bullet \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

(40) eje $x \Rightarrow \nabla \times \bar{E} = 0$

eje $y \Rightarrow \nabla \times \bar{E} - \frac{v}{c^2}\bar{E}_3 = 0$

eje z $\Rightarrow \nabla \times \bar{E} + \frac{v}{c^2}\bar{E}_2 = 0$

(41) $\nabla \bullet (0, -\frac{v}{c^2}\bar{E}_3, \frac{v}{c^2}\bar{E}_2) = 0$

(42) $\nabla \times (0, \frac{v}{c^2}\bar{E}_3, \frac{v}{c^2}\bar{E}_2) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{J}{c^2\varepsilon_0} = \mu_0 J$ (ley de Ampère)

7.4. LA TRANSFORMACIÓN DEL POTENCIAL ELECTROMAGNÉTICO

Ahora bien, recordemos que la fuerza entre dos cargas es:

(43) $\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$

Por definición, el campo eléctrico, en el sistema $\bar{S}$ es:

(44) en forma vectorial: $\bar{E}_n = \dfrac{\vec{F}}{q} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{R}}{R^3}$ (ley de Coulomb)

Recordemos también que en el sistema $\bar{S}$, el vector $\vec{R}$ (del punto P en el sistema S a la carga q en el origen del sistema $\bar{S}$), y la magnitud R de este vector son, respectivamente:

(45) $\vec{R} = \bar{x}_p\hat{\imath} + \bar{y}_p\hat{\jmath} + \bar{z}_p\hat{k}$

(46) $R = (\bar{x}_p{}^2 + \bar{y}_p{}^2 + \bar{z}_p{}^2)^{1/2}$

Sustituimos (44) a (46) en (33) a (35) para obtener el campo eléctrico medido en el sistema S:

(47) $E_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{-vt}{[y_p{}^2 + z_p{}^2 + (vt)^2]^{3/2}}\right)$

(48) $E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{y_p}{[y_p{}^2 + z_p{}^2 + (vt)^2]^{3/2}}\right)$

(49) $E_3 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{z_p}{[y_p{}^2 + z_p{}^2 + (vt)^2]^{3/2}}\right)$

Resumiendo (47) a (49), obtenemos el campo eléctrico E_n en el sistema S:

(50) en forma vectorial: $E_n = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{R}}{R^3}$

Dado que (44) y (50) son iguales, consta que el campo eléctrico, medido en el punto P por observadores en los sistemas S y $\bar{S}$ es idéntico.

Pero, el campo magnético en el punto P no es el mismo, visto desde S o desde $\bar{S}$. Recordemos:

(36) $B_1 = 0$

(37) $B_2 = -v/c^2\,\bar{E}_3$

(38) $B_3 = +v/c^2\,\bar{E}_2$

En las ecuaciones (36) a (38) reconocemos el producto cruz (producto vectorial) $v \times E$, como se comprueba a continuación:

(51) $B_n = \dfrac{1}{c^2}(v \times E_n) = \dfrac{1}{c^2}\begin{pmatrix} \hat{\imath}.............\hat{\jmath}...............\hat{k} \\ v.............0..............0 \\ E_1...........E_2..........E_3 \end{pmatrix} = o\hat{\imath} - \dfrac{1}{c^2}vE_3\hat{\jmath} + \dfrac{1}{c^2}vE_2\hat{k}$

Ahora bien, recordemos que:

(50) $E_n = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3}$

Combinando (51) & (50), obtenemos.

(52) en forma vectorial: $\vec{B} = \frac{q}{c^2 4\pi\varepsilon_0 R^3}(\vec{v} \times \vec{R})$

Recordemos que:

(53) $(\overline{A} \times \overline{B})^n = \varepsilon^n_{pq} A^p B^q$

Por lo tanto,

(54) $(v \times R)^n = \varepsilon^n_{pq} v^p R^q$

Tomando en cuenta que:

(55) $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

y combinando (52), (54) & (55) obtenemos:

(56) $B^j = \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\varepsilon^j_{kl} v^k R^l}{R^3}$ (ley de Biot-Savart)

Nota bene: Todas estas cuatro corroboraciones de la invarianza bajo Lorentz de diferentes grupos de ecuaciones vectoriales podrían aparecer innecesarias al lector experto en matemáticas, dado que las ecuaciones equivalentes en forma tensorial garantizan *per se* que son independientes de los sistemas de referencia inerciales, dada la ley de transformación de objetos tensoriales:

(57) $K'^\alpha = L'^\alpha_\beta K''^\beta$